# Concours général de mathématique s 2017.

## I Problème : parties de $\mathbb{C}$ de type $S$.

Ce problème peut être lié à une question algébrique (résolution d'équation, théorie de Gallois) à l'étude de fonctions holomorphes ou de suites complexes et donc de fractales. Bref, en fait je n'en sais rien.

### Partie A : Quelques exemples simples.

1. (a) Pour ces questions il suffit de compter combien de nombre de l'ensemble proposé sont dans le disque unité du plan complexe.

   $b(\{0\}) = 1$

   (b) $b(\mathbb{C}) = \infty$.

   (c) $b(\mathbb{N}) = 2$.

   (d) $b(\mathbb{N}^*) = 1$.

2. (a) $]1; +\infty[$ est de type $S$ et $b(]1; +\infty[) = 0$.

   (b) $\mathbb{Z}$ est de type $S$ et $b(\mathscr{A}) = 3$.

3. Soit $\mathscr{A}$ une partie de type $S$.

   Démontrons que $\overline{\mathscr{A}}$ est de type $S$.

   (i) $\mathscr{A} \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow \overline{\mathscr{A}} \subseteq \mathbb{C}$.

   (ii) $\mathscr{A}$ est non vide donc il existe $z \in \mathscr{A}$ et donc $\overline{z} \in \overline{\mathscr{A}}$. Donc $\overline{\mathscr{A}}$ est non vide.

   (iii) Soit $z_1, z_2 \in \overline{\mathscr{A}}$.
   Donc $\overline{z_1}, \overline{z_2} \in \mathscr{A}$.
   Donc $\overline{z_1 z_2} \in \mathscr{A}$.
   Donc $z_1 z_2 \in \overline{\mathscr{A}}$.

   (iv) Soit $z_1, z_2 \in \overline{\mathscr{A}}$.
   Donc $\overline{z_1}, \overline{z_2} \in \mathscr{A}$.
   Donc $\overline{z_1}^2 + \overline{z_2}^2 \in \mathscr{A}$.
   Autrement dit $\overline{z_1^2 + z_2^2} \in \mathscr{A}$.
   Donc $z_1^2 + z_2^2 \in \overline{\mathscr{A}}$.

Nous avons démontré que

$$\boxed{\text{Si } \mathscr{A} \text{ est de type } S \text{ alors } \overline{\mathscr{A}} \text{ est de type } S.}$$

Précisons $b\left(\overline{\mathscr{A}}\right)$.

$$\begin{cases} z \in \mathscr{A} \\ |z| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z} \in \overline{\mathscr{A}} \\ |\overline{z}| \leq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{b\left(\overline{\mathscr{A}}\right) = b(\mathscr{A}).}$$

**Partie B : deux exemples de parties de $\mathbb{C}$ de type $S$.**

1. (a) Il s'agit de la somme des trois premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $j$. Donc

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j}.$$

Or $j^3 = \left(\mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1$ donc

$$\boxed{1 + j + j^2 = 0.}$$

(b) Démontrons que $\mathbb{Z}[j]$ est de type $S$.

(i) Pour $a$ et $b$ entiers $a + bj$ est un complexe. Donc $\mathbb{Z}[j] \subseteq \mathbb{C}$.

(ii) $j \in \mathbb{Z}[j]$ donc $\mathbb{Z}[j]$ est non vide.

(iii)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) \\ &= a_1 a_2 + j^2 b_1 b_2 + j(b_1 a_2 + a_1 b_2) \end{aligned}$$

Donc, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= a_1 a_2 + (-1 - j) b_1 b_2 + j(b_1 a_2 + a_1 b_2) \\ &= [a_1 a_2 - b_1 b_2] + j\,[-b_1 b_2 + b_1 a_2 + a_1 b_2] \end{aligned}$$

Ainsi $z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[j]$.

(iv) Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$.

$$\begin{aligned} z^2 &= (a+jb)^2 \\ &= a^2 + 2jab + j^2b^2 \\ &= a^2 + 2jab + (-1-j)b^2 \\ &= a^2 - b^2 + j\left(2ab - b^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi $z^2$ est bien élément de $\mathbb{Z}[j]$.
En procédant de même nous établirions sans difficultés que pour $z_1{,}z_2 \in \mathbb{Z}[j]$, $z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{Z}[j]$.

Nous avons démontré que

$$\boxed{\mathbb{Z}[j] \text{ est de type } S.}$$

(c) Recherchons les éléments de $\mathbb{Z}[j]$ de module inférieur ou égale à 1 par analyse puis synthèse.

i. Analyse.
Soit $z = a + jb$ un élément de $\mathbb{Z}[j]$ tel que $|z| \leq 1$.

$$\begin{aligned} |z| \leq 1 &\Leftrightarrow \left| a + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) b \right| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \left| \left(a - \frac{1}{2}b\right) + i\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}b\right) \right| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}b\right)^{+} \left(\frac{1}{2}b\sqrt{3}\right)]^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\sqrt{3}\right)^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\sqrt{3}\right)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq a - \frac{1}{2}b \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{2}b\sqrt{3} \leq 1 \end{array} \right.$$

Du second encadrement on déduit : $b \in \{-1; 0; 1\}$.

Puis on déduit les valeurs possibles pour $a$ avec le premier encadrement.

| $b$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $0$<br>$-1$ | $-1$<br>$0$<br>$-1$ | $0$<br>$1$ |

Par conséquent les nombres recherchés sont parmi : $-j$, $-1-j$, $-1$, $0$, $-1$, $j$ et $1+j$.

ii. Synthèse.

On vérifie aisément que les nombres précédents sont dans $\mathbb{Z}[j]$ et de module inférieur ou égale à 1.

Nous avons démontré que les seuls nombres de $\mathbb{Z}[j]$ de module inférieur à 1 sont $-j$, $-1-j$, $-1$, $0$, $-1$, $j$ et $1+j$.
Donc $b(\mathbb{Z}[j]) = 7$.

(d) La démonstration faite à la question B.1.(b) reste valable.

De même le résultat de la question précédente reste valable en excluant le zéro.

Vérifions que si $z_1$ et $z_2$ sont non nuls, alors $z_1 z_2 \neq 0$ et $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$.

* Le produit de deux nombres complexes est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul. Donc $z_1 z_2 \neq 0$.
* $z_1^2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 - iz_2)(z_1 + iz_2) = 0$.

  En considérant les parties réelles et imaginaires :

  $$\begin{cases} a_1 - \frac{1}{2}b_1 = \epsilon\frac{1}{2}\sqrt{3}b_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}b_1 = \epsilon\left(a_2 - \frac{1}{2}b_2\right) \end{cases} \quad \text{avec } \epsilon \in \{-1; 1\}.$$

  En raisonnant sur l'irrationalité de $\sqrt{3}$ nous obtenons que nécessairement $b_1 = b_2 = 0$ et donc $a_1 = a_2 = 0$.

$$b\left(\mathbb{Z}[j]^*\right) = 6.$$

2. (a) Remarquons $\mathbb{Z}[j] \subseteq \mathscr{R} \subseteq \mathbb{C}$, donc $\mathscr{R}$ est une partie non vide de $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
z_1,z_2 \in \mathscr{R} &\Rightarrow z_1^2,z_2^2 \in \mathbb{Z}[j] \\
&\Rightarrow z_1^2 z_2^2 \in \mathbb{Z}[j] \\
&\Rightarrow (z_1 z_2)^2 \in \mathbb{Z}[j] \\
&\Rightarrow z_1 z_2 \in \mathscr{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1,z_2 \in \mathscr{R} &\Rightarrow z_1^2,z_2^2 \in \mathbb{Z}[j] \\
&\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{Z}[j]
\end{aligned}$$

et comme $\mathbb{Z}[j] \subseteq \mathscr{R}$ :

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 \in \mathscr{R}$$

(b) $\mathbb{Z}[j] \subseteq \mathscr{R} \Rightarrow b\left(\mathbb{Z}[j]\right) \leq b\left(\mathscr{R}\right)$.
Notons $N = \{-j, -1-j, -1, 0, -1, j, 1+j\}$

Déterminons les éléments de $\mathscr{R}$ dont le module est inférieur à 1.

* Analyse.
  Soit $z \in \mathscr{R}$ de module inférieur à 1.

$$\begin{aligned}
|z| \leq 1 &\Rightarrow |z^2| \leq 1 \\
&\Rightarrow z^2 \in \mathbb{Z}[j] \cap N
\end{aligned}$$

  Donc il existe $r \in N$ tel que $z^2 = r$.
* Synthèse.
  Soit $z$ la racine carrée d'un élément de $N$. Alors clairement $z \in \mathscr{R}$ et $|z| \leq 1$.

Chaque élément de $N$, hormis 0 admet deux racines carrées distinctes et ces racines sont distinctes deux à deux. Par conséquent il y a 13 éléments de $\mathscr{R}$ dont le module est inférieur à 1.

| Éléments de $N$ | Écriture exponentielle | Racines carrées |
|---|---|---|
| $0$ | | $0$ |
| $1$ | | $1$<br>$-1$ |
| $-1$ | | $i$<br>$-i$ |
| $j$ | $\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$ | $\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$<br>$\exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)$ |
| $-j$ | $\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)$ | $\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)$<br>$\exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right)$ |
| $1+j$ | $\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$ | $\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$<br>$\exp\left(-i\frac{5\pi}{6}\right)$ |
| $-1-j$ | $\exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)$ | $\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)$<br>$\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$ |

$$b\left(\mathscr{R}\right) = 13.$$

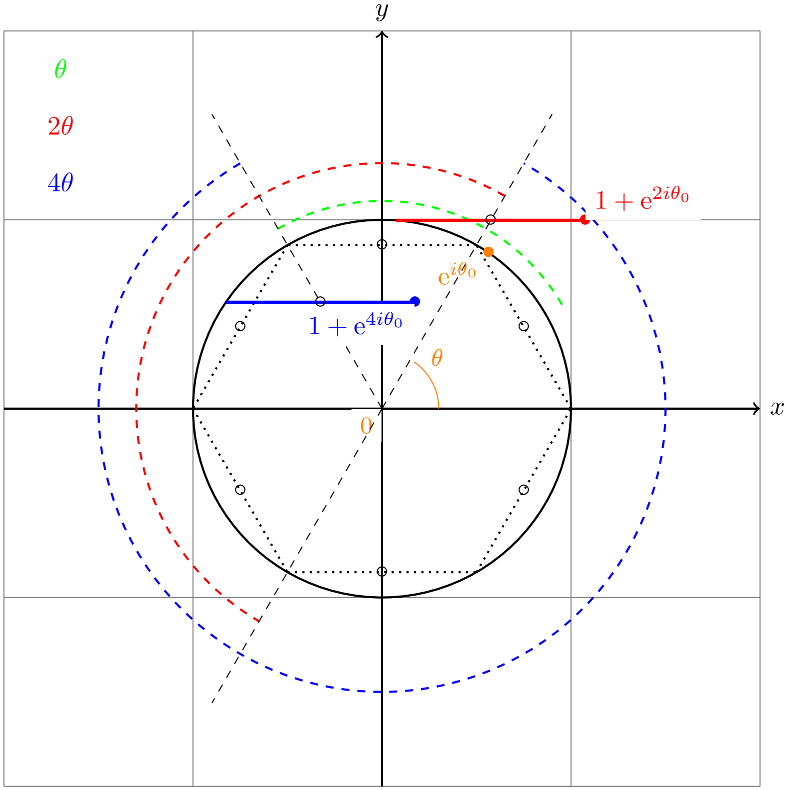
**Partie C : à la recherche des valeurs possibles de $b\left(\mathscr{A}\right)$.**

1. Exhibons une infinité de termes de $\mathscr{A}$ de module strictement inférieur à 1.

   Considérons la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Puisque $|a| < 1$, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, $|a^n| < 1$.
   Nous aurions pu plus simplement constater que la suite $(|a^n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
   D'autre part si pour $n < m$, $a^n = a^m$ alors $a^{m-N} = 1$ ce qui contredit $0 < |a| < 1$. Donc nécessairement les termes de la suite sont distincts deux à deux.
   Nous avons trouvé une infinité de terme de $\mathscr{A}$ dont le module est strictement inférieur à 1 et donc $b\left(\mathscr{A}\right) = \infty$.

   Ainsi si un élément de $\mathscr{A}$ a un module compris strictement entre 0 et 1, alors $b\left(\mathscr{A}\right) = \infty$.

2. (a) Après avoir établi que $|a^2 + a^4| = |1 + \mathrm{e}^{2i\theta}$, il est possible d'aborder la démonstration avec un point de vue géométrique. Nous recherchons les points d'affixe $1 + \mathrm{e}^{2i\theta}$ ou $1 + \mathrm{e}^{4i\theta}$ qui sont strictement à l'intérieur du disque unité et différents de l'origine.




En raisonnant sur le dessin nous conjecturons les valeurs limites de $\theta$ auxquelles il faudra s'intéresser.

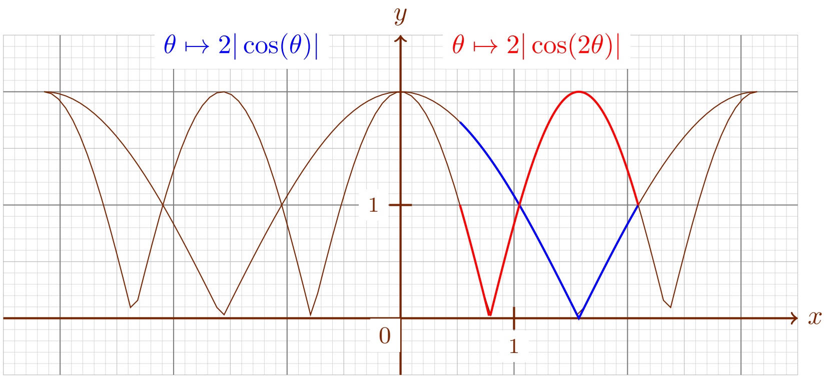
| $\theta$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|
| $2\theta$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{4\pi}{3}$ |
| $4\theta$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $2\pi+\frac{\pi}{3}$ |

Notons $\theta = \text{Arg}(a)$.

$$
\begin{aligned}
|a^2+a^4| &= |a^2| \times |1+a^2| \\
&= |1+a^2| \\
&= \left|1+\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^2\right| \\
&= \left|1+\mathrm{e}^{2i\theta}\right| \\
&= |1+\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)| \\
&= \sqrt{(1+\cos(2\theta))^2+\sin^2(2\theta)} \\
&= \sqrt{1+2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)+\sin^2(2\theta)} \\
&= \sqrt{2+2\cos(2\theta)+1} \\
&= \sqrt{2(1+\cos(2\theta))} \\
&= \sqrt{4\cos^2(\theta)} \\
&= 2|\cos(\theta)|
\end{aligned}
$$

De même : $|a^4+a^8| = 2|\cos(2\theta)|$.

Avec la calculatrice nous pouvons conjecturer encore une fois le résultat.




Démontrons l'assertion de l'énoncé en raisonnant par disjonction des cas.

Soit $\theta \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right[$.

* $\theta \neq \frac{\pi}{3}$ puisque ce n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{6}$.

* Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right[$, alors $|\cos(\theta)| \in \left]\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$, et donc $|2\cos(\theta)| \in \left]1; \sqrt{3}\right[$.

* Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right[$, alors $|\cos(2\theta)| \in \left]\frac{1}{2};1\right[$, et donc $|2\cos(2\theta)| \in ]1;2[$.

(b) Soit $\text{Arg}(a) = \theta \in \left]0;\frac{pi}{6}\right[$.
Nous remarquons que $|a^{2n}+a^{4n}| = \left|(a^n)^2+(a^n)^4\right|$. Démontrons qu'il est possible de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $a^n$ peut être traité comme à la question précédente.

Démontrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n \in \left]\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right[$.

$\theta > 0$ et $\mathbb{R}$ est archimédien donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(n_0-1)\theta \leq \frac{\pi}{6} < n_0\theta.$$

De $\begin{cases} \theta < \frac{\pi}{6} \\ (n_0-1)\theta < \frac{\pi}{6} \end{cases}$, nous déduisons $n_0\theta < \frac{2\pi}{6}$.
Finalement $\frac{\pi}{6} < n_0\theta < \frac{2\pi}{3}$.

Nous avons démontré qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Arg}(a) \in \left]\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right[$.

Donc, d'après la question précédente nous pouvons maintenant affirmer que si $\text{Arg}(a) \in \left]0;\dfrac{\pi}{6}\right[$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n}+a^{4n}\right| < 1$.

(c) Nous avons établi aux deux précédentes questions que si $\theta \in \left]0,\frac{2\pi}{3}\right[$, et si $\theta$ n'est pas multiples de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{6}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |a^{2n}+a^{4n}| < 1$.
En considérant les conjugués nous en déduisons le résultat pour $\theta \in \left]-\frac{2\pi}{3},0\right[$.

(d) Les questions précédentes nous ont permis d'établir le résultat lorsque $\theta \in \left]-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right[$.
Soit $\theta \in \left]\frac{2\pi}{3};\pi\right[$. Donc : $\frac{4\pi}{3} \leq 2\theta \leq 2\pi$. Ce qui revient a dire que $\theta \equiv \theta'$ (mod $2\pi$) avec $\theta' \in \left]-\frac{2\pi}{3};0\right[$ et nous sommes donc ramenés au cas des questions précédentes.
De même si $\theta \in \left]-\frac{2\pi}{3};-\pi\right[$.
Finalement dans tous les cas :

il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |a^{2n}+a^{4n}| < 1$.

3. (a) Démontrons que nécessairement il existe au moins un $a \in \mathscr{A}$ tel que $|a| = 1$.

Notons $D$ le disque unité du plan complexe. Ainsi $b(\mathscr{A})$ est, dans le cas fini, le cardinal de $\mathscr{A} \cap D$.

D'après la question C.1 si $b(\mathscr{A})$ est fini alors, nécessairement, pour tout $a \in \mathscr{A} \cap D$, $|a| = 1$ ou $|0|$.
Comme $b(\mathscr{A}) \geq 2$ même si l'un des élément de $\mathscr{A} \cap D$ est effectivement nul l'autre (ou les autres sont alors de module égale à 1.

$$\boxed{\text{Si } 2 \leq b(\mathscr{A}) < \infty, \text{ alors il existe } a \in \mathscr{A} \text{ tel que } |a| = 1.}$$

(b) Déterminons les valeurs possibles de $a$.

D'après les questions C.1, C.2 et la précédente pour que $b(\mathscr{A})$ reste fini, et si $a$ est non nul, alors il faut nécessairement que $\operatorname{Arg}(a)$ soit un multiple de $\frac{\pi}{6}$ ou de $\frac{\pi}{4}$.
Ainsi :

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Nécessairement :}\\ \operatorname{Arg}(a) \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, 0, \right. \\ \left. \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \pi\right\}.\end{gathered}}$$

(c) Nous déduisons des questions précédentes qu'il y a au maximum 16 valeurs distinctes de $\mathscr{A}$ non nulles de module inférieur à 1 lorsque $b(\mathscr{A})$ est fini. Et donc en comptant zéro :

$$\boxed{\text{Si } b(\mathscr{A}) \text{ est fini, alors } b(\mathscr{A}) \leq 17.}$$

4. Choisissons un élément de l'ensemble trouvé à la question C.3.(b) pour engendrer le reste de l'ensemble.

Si $\mathscr{A} = \mathbb{Z}\left[e^{i\frac{\pi}{2}}\right] = \mathbb{Z}[i]$, alors $\mathscr{A}$ est de type $S$ et nous avons bien $b(\mathscr{A}) = 5$.
En effet : $\mathbb{Z}[i] \cap D = \{0, i, 1, -1, -i, 1\}$.

$$\boxed{b(\mathbb{Z}[i]) = 5.}$$

5. En procédant comme à la question B.2 nous pouvons construire l'ensemble $\mathscr{R}_1$ formé des racines carrées d'éléments de $\mathbb{Z}[i]$. et alors $b\left(\mathscr{R}_1\right) = 9$.

   Nous pourrions aussi partir de l'ensemble des racines huitièmes de l'unité : $\left\{\mathrm{e}^{ik\frac{\pi}{4}} \mid k \in [\![0,7]\!]\right\}$ et considérer l'ensemble engendré par multiplication et somme des carrés ainsi que multiplication par un entier.

6. Notons $\mathbb{U}_k$ l'ensemble des racines d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de l'unité.
   — $\mathbb{U}_1 = \{1\}$,
   — $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$,
   — $\mathbb{U}_3 = \left\{\exp\left(i\frac{2k\pi}{3}\right) \mid -1 \leq k \leq 1\right\}$,
   — $\mathbb{U}_4 = \left\{\exp\left(i\frac{k\pi}{2}\right) \mid -1 \leq k \leq 2\right\}$,
   — $\mathbb{U}_6 = \left\{\exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right) \mid -2 \leq k \leq 3\right\}$,
   — $\mathbb{U}_8 = \left\{\exp\left(i\frac{k\pi}{4}\right) \mid -3 \leq k \leq 4\right\}$,
   — $\mathbb{U}_{12} = \left\{\exp\left(i\frac{k\pi}{6}\right) \mid -5 \leq k \leq 6\right\}$,

   D'après la question C.3 nous savons que, pour que $b(\mathscr{A})$ soit fini, les seuls éléments qui peuvent être dans le disque unité sont dans

$$\mathscr{D} = \{0\} \cup \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3 \cup \mathbb{U}_4 \cup \mathbb{U}_6 \cup \mathbb{U}_8 \cup \mathbb{U}_{12}.$$

| $b(\mathscr{A})$ | Exemple de $\mathscr{A}$ | Éléments de $\mathscr{D}$ |
|---|---|---|
| 0 | $]1,+\infty[$ | $\emptyset$ |
| 1 | $\{0\}$ ou $\mathbb{N}^*$ | 0 ou 1 |
| 2 | $\mathbb{N}$ | 0 et 1 |
| 3 | $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[1]$ | 0, $-1$ et 1 |
| 4 | | |
| 5 | $\mathbb{Z}[i]$ | 0, $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$ avec $-1 \leq k \leq 2$. |
| 6 | $\mathbb{Z}[j]^*$ | $\exp\left(i\frac{2k\pi}{3}\right)$ avec $-2 \leq k \leq 3$. |
| 7 | $\mathbb{Z}[j]$ | 0, $\exp\left(i\frac{2k\pi}{3}\right)$ avec $-2 \leq k \leq 3$. |
| 8 | | |
| 9 | $\mathscr{R}_1$ | 0, $\exp\left(i\frac{k\pi}{4}\right)$ avec $-3 \leq k \leq 4$. |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | $\mathscr{R}$ | 0, $\exp\left(i\frac{k\pi}{6}\right)$ avec $-5 \leq k \leq 6$. |
| 14 | | |
| 15 | | |
| 16 | | |
| 17 | | |

# II Problème : c'est probablement bon.

## Partie A : Franck passe un premier examen.

1. Notons $X_r$, avec $r \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses données après la sixième question et jusqu'à la question numéro $r$.
   Notons $S_r$, pour $r \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire comptant le nombre de points obtenus en tout par Franck après avoir répondu à la question numéro $r$.
   Remarquons que : $S_r = X_r - [(r-6) - X_r] + 6 = 2X_r + 12 - r$.

   Calculons $\mathbb{P}(S_7 \geq 7)$.

   $$\begin{aligned} S_7 \geq 7 &\Leftrightarrow 2X_7 \geq 2 \\ &\Leftrightarrow X_7 \geq 1 \end{aligned}$$

   Or $X_7$ suit une loi binomiale de paramètres 1 et $p$, donc $\mathbb{P}(X_7 \geq 7) = p$ et enfin $\mathbb{P}(S_7 \geq 7) = p$.

   Calculons $\mathbb{P}(S_8 \geq 7)$.

   $$\begin{aligned} S_8 \geq 7 &\Leftrightarrow 2X_8 \geq 3 \\ &\Leftrightarrow X_8 \geq 1{,}5 \end{aligned}$$

   Or $X_8$ suit une loi binomiale de paramètres 2 et $p$, donc $\mathbb{P}(X_8 \geq 7) = p^2$ et enfin $\mathbb{P}(S_8 \geq 7) = p^2$.

   Une autre rédaction.
   Notons $S_r$, pour $r \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire comptant le nombre de points obtenus en tout par Franck après avoir répondu à la question numéro $r$.
   Notons encore $X_r$, pour $r \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire comptant le nombre de points obtenus par Franck à la question numéro $r$ et, d'après l'énoncé

   | $x_i$ | 1 | $-1$ |
   |---|---|---|
   | $\mathbb{P}(X_r = x_i)$ | $p$ | $1-p$ |

   Calculons $\mathbb{P}(S_7 \geq 7)$.

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_7 \geq 7) &= \mathbb{P}(X_7 = 1) \\ &= p \end{aligned}$$

Calculons $\mathbb{P}(S_8 \geq 7)$.

$$\mathbb{P}(S_8 \geq 7) = \mathbb{P}\left[(X_7 = 1) \cap (X_8 = 1)\right]$$

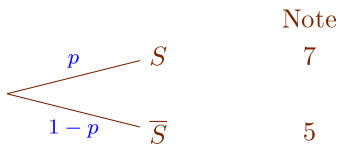
L'énoncé suppose que répondre justement aux questions sont des événements indépendants les uns des autres, et donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_8 \geq 7) &= \mathbb{P}(X_7 = 1) \times \mathbb{P}(X_8 = 1) \\ &= p^2\end{aligned}$$

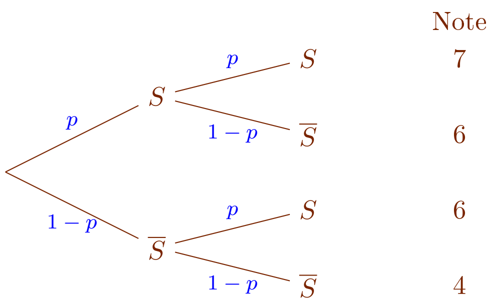
Or $0 < p < 1$, donc $p^2 < p$.
Finalement

> Franck a donc une plus forte probabilité de réussir son examen en s'arrêtant après la question 7 plutôt qu'après la 8.

Nous pouvions également raisonner en usant d'un arbre probabiliste pondéré.
Notons $S$ l'événement « Franck répond correctement à une question ».
S'il répond jusqu'à la question 7, alors




S'il répond jusqu'à la question 8, alors




2. Calculons $\mathbb{P}(S_{10} \geq 7)$.

3.

**Partie B : Franck passe un second examen.**