Concours général de mathématique s 2017.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
Classes de terminale S
DURÉE : 5 HEURES
La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

I Problème : parties de $\mathbb{C}$ de type S.

Ce problème peut être lié à une question algébrique (résolution d'équation, théorie de Gallois) à l'étude de fonctions holomorphes ou de suites complexes et donc de fractales. Bref, en fait je n'en sais rien.

Une partie $\mathscr{A}$ non vide de $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes) est dite de type S, si pour tout $z_1 \in \mathscr{A}$ et $z_2 \in \mathscr{A}$ le produit $z_1 z_2$ et la somme $z_1^2 + z_2^2$ sont encore dans $\mathscr{A}$.

Dans tout le problème $\mathscr{A}$ désigne une partie de $\mathbb{C}$ de type S.

On note $b(\mathscr{A})$ le nombre de nombres complexes z de $\mathscr{A}$ dont le module $|z|$ est inférieur ou égale à 1.
On note $b(\mathscr{A}) = \infty$ si ce nombre est infini.

Partie A : Quelques exemples simples.

1. Les ensembles suivants sont des parties de $\mathscr{C}$ de type S (on ne demande pas de le vérifier), préciser pour chacun d'eux la valeur de $b(\mathscr{A})$:

   (a) $\mathscr{A} = \{0\}$.

   Pour ces questions il suffit de compter combien de nombre de l'ensemble proposé sont dans le disque unité du plan complexe. En notant D ce disque unité nous remarquons : $b(\mathscr{A}) = \text{Card}(\mathscr{A} \cap D$ (en ne distinguant pas les différentes puissances de l'infini). La fonction b permet d'évaluer la densité du maillage qu'induit $\mathscr{A}$ dans $\mathbb{C}$.

   $b(\{0\}) = 1$

(b) $\mathscr{A} = \mathbb{C}$.

$b(\mathbb{C}) = \infty$.

(c) $\mathscr{A} = \mathbb{N}$.

$b(\mathbb{N}) = 2$.

(d) $\mathscr{A} = \mathbb{N}^*$.

$b(\mathbb{N}^*) = 1$.

2. (a) Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 0$.

   $]1;+\infty[$ est de type S et $b(]1;+\infty[) = 0$.

   (b) Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 3$.

   $\mathbb{Z}$ est de type S et $b\left(\mathscr{A}\right) = 3$.

3. On note $\overline{\mathscr{A}} = \{\overline{z}, z \in \mathscr{A}\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes conjugués des éléments de $\mathscr{A}$. Montrer que $\overline{\mathscr{A}}$ est de type S et préciser $b\left(\overline{\mathscr{A}}\right)$.

   Soit $\mathscr{A}$ une partie de type S.

   Démontrons que $\overline{\mathscr{A}}$ est de type S.

   (i) $\mathscr{A} \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow \overline{\mathscr{A}} \subseteq \mathbb{C}$.

   (ii) $\mathscr{A}$ est non vide donc il existe $z \in \mathscr{A}$ et donc $\overline{z} \in \overline{\mathscr{A}}$. Donc $\overline{\mathscr{A}}$ est non vide.

   (iii) Soit $z_1, z_2 \in \overline{\mathscr{A}}$.
   Donc $\overline{z_1}, \overline{z_2} \in \mathscr{A}$.
   Donc $\overline{z_1 z_2} \in \mathscr{A}$.
   Donc $z_1 z_2 \in \overline{\mathscr{A}}$.

   (iv) Soit $z_1, z_2 \in \overline{\mathscr{A}}$.
   Donc $\overline{z_1}, \overline{z_2} \in \mathscr{A}$.
   Donc $\overline{z_1}^2 + \overline{z_2}^2 \in \mathscr{A}$.
   Autrement dit $\overline{z_1^2 + z_2^2} \in \mathscr{A}$.
   Donc $z_1^2 + z_2^2 \in \overline{\mathscr{A}}$.

   Nous avons démontré que

   Si $\mathscr{A}$ est de type S alors $\overline{\mathscr{A}}$ est de type S.

Précisons $b\left(\overline{\mathscr{A}}\right)$.

$$\left\{\begin{array}{l} z \in \mathscr{A} \\ |z| \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{z} \in \overline{\mathscr{A}} \\ |\overline{z}| \leq 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{b\left(\overline{\mathscr{A}}\right) = b(\mathscr{A}).}$$

Partie B : deux exemples de parties de $\mathbb{C}$ de type S.

1. On définit le complexe j par $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et on note $\mathbb{Z}[j] = \{a+bj,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes de la forme $a + bj$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

   (a) Calculer $1 + j + j^2$.

   Il s'agit de la somme des trois premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison j. Donc

   $$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j}.$$

   Or $j^3 = \left(\mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1$ donc

   $$\boxed{1 + j + j^2 = 0.}$$

   (b) Justifier que $\mathbb{Z}[j]$ est de type S.

   Démontrons que $\mathbb{Z}[j]$ est de type S.

   (i) Pour a et b entiers $a + bj$ est un complexe. Donc $\mathbb{Z}[j] \subseteq \mathbb{C}$.

   (ii) $j \in \mathbb{Z}[j]$ donc $\mathbb{Z}[j]$ est non vide.

   (iii)

   $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) \\ &= a_1 a_2 + j^2 b_1 b_2 + j(b_1 a_2 + a_1 b_2) \end{aligned}$$

   Donc, d'après la question précédente :

   $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= a_1 a_2 + (-1 - j) b_1 b_2 + j(b_1 a_2 + a_1 b_2) \\ &= [a_1 a_2 - b_1 b_2] + j\,[-b_1 b_2 + b_1 a_2 + a_1 b_2] \end{aligned}$$

   Ainsi $z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[j]$.

(iv) Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$.

$$\begin{aligned} z^2 &= (a+jb)^2 \\ &= a^2 + 2jab + j^2b^2 \\ &= a^2 + 2jab + (-1-j)b^2 \\ &= a^2 - b^2 + j\left(2ab - b^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi z^2 est bien élément de $\mathbb{Z}[j]$.
En procédant de même nous établirions sans difficultés que pour $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[j]$, $z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{Z}[j]$.

Nous avons démontré que

$$\boxed{\mathbb{Z}[j] \text{ est de type } S.}$$

(c) Montrer que $b\left(\mathbb{Z}[j]\right) = 7$.

Recherchons les éléments de $\mathbb{Z}[j]$ de module inférieur ou égale à 1 par analyse puis synthèse.

i. Analyse.
Soit $z = a + jb$ un élément de $\mathbb{Z}[j]$ tel que $|z| \leq 1$.

$$\begin{aligned} |z| \leq 1 &\Leftrightarrow \left|a + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)b\right| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \left|\left(a - \frac{1}{2}b\right) + i\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}b\right)\right| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}b\right)^{+}\left(\frac{1}{2}b\sqrt{3}\right)]^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\sqrt{3}\right)^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\sqrt{3}\right)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} -1 \leq a - \frac{1}{2}b \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{2}b\sqrt{3} \leq 1 \end{cases}$$

Du second encadrement on déduit : $b \in \{-1; 0; 1\}$.

Puis on déduit les valeurs possibles pour a avec le premier encadrement.

b	-1	0	1
a	0 -1	-1 0 -1	0 1

Par conséquent les nombres recherchés sont parmi : $-j$, $-1-j$, -1, 0, -1, j et $1+j$.

ii. Synthèse.

On vérifie aisément que les nombres précédents sont dans $\mathbb{Z}[j]$ et de module inférieur ou égale à 1.

Nous avons démontré que les seuls nombres de $\mathbb{Z}[j]$ de module inférieur à 1 sont $-j$, $-1-j$, -1, 0, -1, j et $1+j$.
Donc $b(\mathbb{Z}[j]) = 7$.

(d) On note $\mathbb{Z}[j]^* = \mathbb{Z}[j] \setminus \{0\}$ (les éléments non nuls de $\mathbb{Z}[j]$). Justifier que $\mathbb{Z}[j]^*$ est de type S et déterminer $b(\mathbb{Z}[j]^*)$.

La démonstration faite à la question B.1.(b) reste valable.

De même le résultat de la question précédente reste valable en excluant le zéro.

Vérifions que si z_1 et z_2 sont non nuls, alors $z_1 z_2 \neq 0$ et $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$.

* Le produit de deux nombres complexes est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul. Donc $z_1 z_2 \neq 0$.
* $z_1^2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 - iz_2)(z_1 + iz_2) = 0$.
  En considérant les parties réelles et imaginaires :
  $$\begin{cases} a_1 - \frac{1}{2}b_1 = \epsilon \frac{1}{2}\sqrt{3}b_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}b_1 = \epsilon\left(a_2 - \frac{1}{2}b_2\right) \end{cases} \quad \text{avec } \epsilon \in \{-1; 1\}.$$
  En raisonnant sur l'irrationalité de $\sqrt{3}$ nous obtenons que nécessairement $b_1 = b_2 = 0$ et donc $a_1 = a_2 = 0$.

$$b(\mathbb{Z}[j]^*) = 6.$$

2. On définie la partie $\mathscr{R}$ de $\mathbb{C}$ par

$$\mathscr{R} = \left\{z \in \mathbb{C},\ z^2 \in \mathbb{Z}[j]\right\}.$$

Ainsi un nombre complexe z est dans $\mathscr{R}$ si et seulement si son carré est dans $\mathbb{Z}[j]$.

(a) Montrer que $\mathscr{R}$ est du type S.

Remarquons $\mathbb{Z}[j] \subseteq \mathscr{R} \subseteq \mathbb{C}$, donc $\mathscr{R}$ est une partie non vide de $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z_1,z_2 \in \mathscr{R} &\Rightarrow z_1^2,z_2^2 \in \mathbb{Z}[j] \\ &\Rightarrow z_1^2 z_2^2 \in \mathbb{Z}[j] \\ &\Rightarrow (z_1 z_2)^2 \in \mathbb{Z}[j] \\ &\Rightarrow z_1 z_2 \in \mathscr{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1,z_2 \in \mathscr{R} &\Rightarrow z_1^2,z_2^2 \in \mathbb{Z}[j] \\ &\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{Z}[j] \end{aligned}$$

et comme $\mathbb{Z}[j] \subseteq \mathscr{R}$:

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 \in \mathscr{R}$$

(b) Déterminer $b(\mathscr{R})$.

$\mathbb{Z}[j] \subseteq \mathscr{R} \Rightarrow b(\mathbb{Z}[j]) \leq b(\mathscr{R})$.
Notons $N = \{-j, -1-j, -1, 0, -1, j, 1+j\}$

Déterminons les éléments de $\mathscr{R}$ dont le module est inférieur à 1.

* Analyse.
  Soit $z \in \mathscr{R}$ de module inférieur à 1.

$$\begin{aligned} |z| \leq 1 &\Rightarrow |z^2| \leq 1 \\ &\Rightarrow z^2 \in \mathbb{Z}[j] \cap N \end{aligned}$$

  Donc il existe $r \in N$ tel que $z^2 = r$.

* Synthèse.
  Soit z la racine carrée d'un élément de N. Alors clairement $z \in \mathscr{R}$ et $|z| \leq 1$.

Chaque élément de N, hormis 0 admet deux racines carrées distinctes et ces racines sont distinctes deux à deux. Par conséquent il y a 13 éléments de $\mathscr{R}$ dont le module est inférieur à 1.

Éléments de N	Écriture exponentielle	Racines carrées
0		0
1		1 -1
-1		i $-i$
j	$\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$	$\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$ $\exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)$
$-j$	$\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)$	$\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)$ $\exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right)$
$1+j$	$\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$	$\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$ $\exp\left(-i\frac{5\pi}{6}\right)$
$-1-j$	$\exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)$	$\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)$ $\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$

$$b\left(\mathscr{R}\right) = 13.$$

Partie C : à la recherche des valeurs possibles de $b\left(\mathscr{A}\right)$.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $0 < |a| < 1$. Montrer que $b\left(\mathscr{A}\right) = \infty$.

Exhibons une infinité de termes de $\mathscr{A}$ de module strictement inférieur à 1.

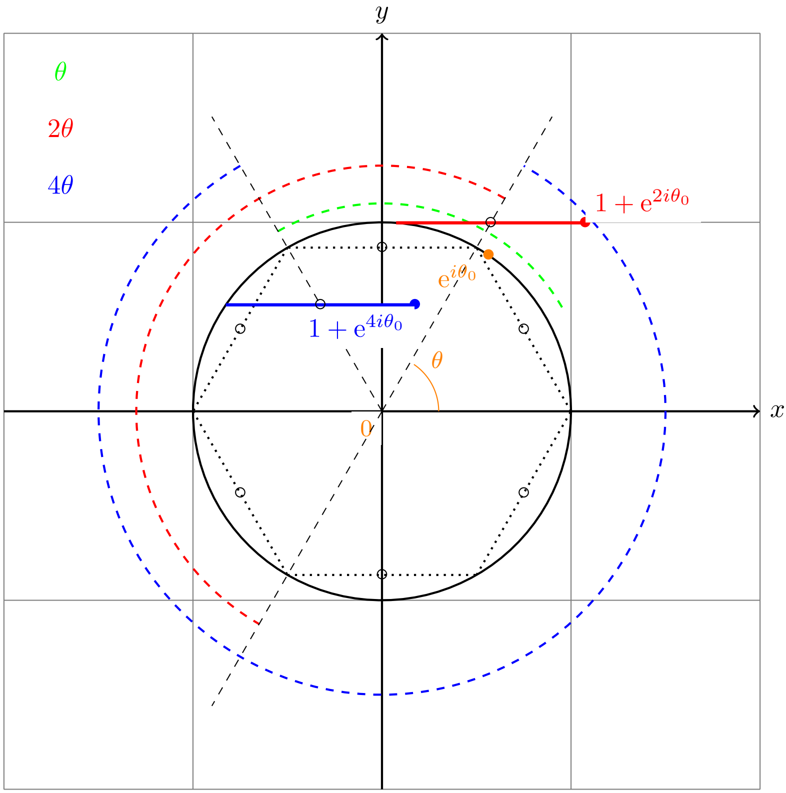
Considérons la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Puisque $|a| < 1$, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, $|a^n| < 1$.
Nous aurions pu plus simplement constater que la suite $(|a^n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
D'autre part si pour $n < m$, $a^n = a^m$ alors $a^{m-N} = 1$ ce qui contredit $0 < |a| < 1$. Donc nécessairement les termes de la suite sont distincts deux à deux.
Nous avons trouvé une infinité de terme de $\mathscr{A}$ dont le module est strictement inférieur à 1 et donc $b\left(\mathscr{A}\right) = \infty$.

Ainsi si un élément de $\mathscr{A}$ a un module compris strictement entre 0 et 1, alors $b\left(\mathscr{A}\right) = \infty$.

2. On considère, dans cette question, un nombre complexe a de module 1. On note $\mathrm{Arg}(a)$ l'unique argument de a inclus dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$. On suppose de plus que $\mathrm{Arg}(a)$ n'est ni un multiple de $\dfrac{\pi}{6}$, ni un multiple de $\dfrac{\pi}{4}$.

   (a) Montrer que si $\mathrm{Arg}(a) \in \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right[$, alors l'un des deux nombres complexes $a^2 + a^4$ ou $a^4 + a^8$ possède un module non nul et strictement inférieur à 1.

   Après avoir établi que $|a^2 + a^4| = |1 + \mathrm{e}^{2i\theta}$, il est possible d'aborder la démonstration avec un point de vue géométrique. Nous recherchons les points d'affixe $1 + \mathrm{e}^{2i\theta}$ ou $1 + \mathrm{e}^{4i\theta}$ qui sont strictement à l'intérieur du disque unité et différents de l'origine.



   En raisonnant sur le dessin nous conjecturons les valeurs limites de θ auxquelles il faudra s'intéresser.

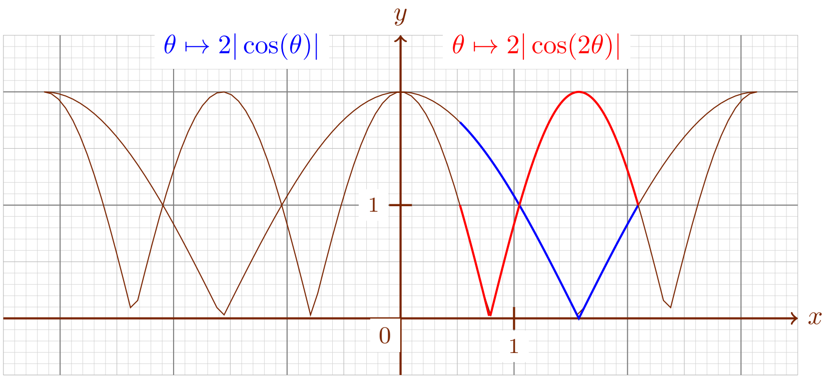
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
2θ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$
4θ	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$2\pi + \frac{\pi}{3}$

Notons $\theta = \mathrm{Arg}(a)$.

$$\begin{aligned}
|a^2 + a^4| &= |a^2| \times |1 + a^2| \\
&= |1 + a^2| \\
&= \left|1 + \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^2\right| \\
&= |1 + \mathrm{e}^{2i\theta}| \\
&= |1 + \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)| \\
&= \sqrt{(1 + \cos(2\theta))^2 + \sin^2(2\theta)} \\
&= \sqrt{1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)} \\
&= \sqrt{2 + 2\cos(2\theta) + 1} \\
&= \sqrt{2(1 + \cos(2\theta))} \\
&= \sqrt{4\cos^2(\theta)} \\
&= 2|\cos(\theta)|
\end{aligned}$$

De même : $|a^4 + a^8| = 2|\cos(2\theta)|$.

Avec la calculatrice nous pouvons conjecturer encore une fois le résultat.



Démontrons l'assertion de l'énoncé en raisonnant par disjonction des cas.

Soit $\theta \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right[$.

* $\theta \neq \frac{\pi}{3}$ puisque ce n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{6}$.

* Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right[$, alors $|\cos(\theta)| \in \left]\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$, et donc $|2\cos(\theta)| \in \left]1; \sqrt{3}\right[$.

* Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right[$, alors $|\cos(2\theta)| \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$, et donc $|2\cos(2\theta)| \in]1; 2[$.

(b) De même démontrer que si $\operatorname{Arg}(a) \in \left]0; \dfrac{\pi}{6}\right[$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.

Soit $\operatorname{Arg}(a) = \theta \in \left]0; \frac{pi}{6}\right[$.
Nous remarquons que $|a^{2n} + a^{4n}| = \left|(a^n)^2 + (a^n)^4\right|$. Démontrons qu'il est possible de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel a^n peut être traité comme à la question précédente.

Démontrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

$\theta > 0$ et $\mathbb{R}$ est archimédien donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(n_0 - 1)\theta \leq \frac{\pi}{6} < n_0\theta.$$

De $\begin{cases} \theta < \frac{\pi}{6} \\ (n_0 - 1)\theta < \frac{\pi}{6} \end{cases}$, nous déduisons $n_0\theta < \frac{2\pi}{6}$.
Finalement $\frac{\pi}{6} < n_0\theta < \frac{2\pi}{3}$.

> Nous avons démontré qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Arg}(a) \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

Donc, d'après la question précédente nous pouvons maintenant affirmer que si $\operatorname{Arg}(a) \in \left]0; \dfrac{\pi}{6}\right[$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.

(c) Montrer que si $\operatorname{Arg}(a) \in \left]-\dfrac{2\pi}{3}; 0\right[$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.

Nous avons établi aux deux précédentes questions que si $\theta \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$, et si θ n'est pas multiples de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{6}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |a^{2n} + a^{4n}| < 1$.
En considérant les conjugués nous en déduisons le résultat pour $\theta \in \left]-\frac{2\pi}{3}, 0\right[$.

(d) Conclure qu'il existe toujours $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + b^{4n}\right| < 1$.

Les questions précédentes nous ont permis d'établir le résultat lorsque $\theta \in \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$.
Soit $\theta \in \left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right[$. Donc : $\frac{4\pi}{3} \leq 2\theta \leq 2\pi$. Ce qui revient a dire que $\theta \equiv \theta'$ (mod 2π) avec $\theta' \in \left]-\frac{2\pi}{3}; 0\right[$ et nous sommes donc ramenés au cas des questions précédentes.
De même si $\theta \in \left]-\frac{2\pi}{3}; -\pi\right[$.
Finalement dans tous les cas :

$$\boxed{\text{il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 0 < |a^{2n} + a^{4n}| < 1.}$$

3. On suppose, dans cette question, que $b(\mathscr{A})$ est fini et supérieur ou égale à 2.

(a) Montrer qu'il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $|a| = 1$.

Démontrons que nécessairement il existe au moins un $a \in \mathscr{A}$ tel que $|a| = 1$.

Notons D le disque unité du plan complexe. Ainsi $b(\mathscr{A})$ est, dans le cas fini, le cardinal de $\mathscr{A} \cap D$.

D'après la question C.1 si $b(\mathscr{A})$ est fini alors, nécessairement, pour tout $a \in \mathscr{A} \cap D$, $|a| = 1$ ou $|0|$.
Comme $b(\mathscr{A}) \geq 2$ même si l'un des élément de $\mathscr{A} \cap D$ est effectivement nul l'autre (ou les autres sont alors de module égale à 1.

$$\boxed{\text{Si } 2 \leq b(\mathscr{A}) < \infty, \text{ alors il existe } a \in \mathscr{A} \text{ tel que } |a| = 1.}$$

(b) Quelles sont alors les valeurs possibles pour $\operatorname{Arg}(a)$?

Déterminons les valeurs possibles de a.

D'après les questions C.1, C.2 et la précédente pour que $b(\mathscr{A})$ reste fini, et si a est non nul, alors il faut nécessairement que $\operatorname{Arg}(a)$ soit un multiple de $\frac{\pi}{6}$ ou de $\frac{\pi}{4}$.
Ainsi :

Nécessairement :

$$\operatorname{Arg}(a) \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \pi\right\}.$$

(c) En déduire que $b(\mathscr{A}) \leq 17$.

Nous déduisons des questions précédentes qu'il y a au maximum 16 valeurs distinctes de $\mathscr{A}$ non nulles de module inférieur à 1 lorsque $b(\mathscr{A})$ est fini. Et donc en comptant zéro :

$$\boxed{\text{Si } b(\mathscr{A}) \text{ est fini, alors } b(\mathscr{A}) \leq 17.}$$

4. Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 5$.

Choisissons un élément de l'ensemble trouvé à la question C.3.(b) pour engendrer le reste de l'ensemble.

Si $\mathscr{A} = \mathbb{Z}\left[e^{i\frac{\pi}{2}}\right] = \mathbb{Z}[i]$, alors $\mathscr{A}$ est de type S et nous avons bien $b(\mathscr{A}) = 5$. En effet : $\mathbb{Z}[i] \cap D = \{0,i,1,-1,-i,1\}$.

$$\boxed{b(\mathbb{Z}[i]) = 5.}$$

5. Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 9$.

En procédant comme à la question B.2 nous pouvons construire l'ensemble $\mathscr{R}_1$ formé des racines carrées d'éléments de $\mathbb{Z}[i]$. et alors $b(\mathscr{R}_1) = 9$.

Nous pourrions aussi partir de l'ensemble des racines huitièmes de l'unité : $\left\{e^{ik\frac{\pi}{4}} \mid k \in [\![0,7]\!]\right\}$ et considérer l'ensemble engendré par multiplication et somme des carrés ainsi que multiplication par un entier.

6. Quelles sont les valeurs possibles de $b(\mathscr{A})$?

Notons $\mathbb{U}_k$ l'ensemble des racines d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de l'unité.

— $\mathbb{U}_1 = \{1\}$,
— $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$,
— $\mathbb{U}_3 = \left\{\exp\left(i\frac{2k\pi}{3}\right) \mid -1 \leq k \leq 1\right\}$,
— $\mathbb{U}_4 = \left\{\exp\left(i\frac{k\pi}{2}\right) \mid -1 \leq k \leq 2\right\}$,
— $\mathbb{U}_6 = \left\{\exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right) \mid -2 \leq k \leq 3\right\}$,
— $\mathbb{U}_8 = \left\{\exp\left(i\frac{k\pi}{4}\right) \mid -3 \leq k \leq 4\right\}$,
— $\mathbb{U}_{12} = \left\{\exp\left(i\frac{k\pi}{6}\right) \mid -5 \leq k \leq 6\right\}$,

D'après la question C.3 nous savons que, pour que $b(\mathscr{A})$ soit fini, les seuls éléments qui peuvent être dans le disque unité sont dans

$$\mathscr{D} = \{0\} \cup \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3 \cup \mathbb{U}_4 \cup \mathbb{U}_6 \cup \mathbb{U}_8 \cup \mathbb{U}_{12}.$$

$b(\mathscr{A})$	Exemple de $\mathscr{A}$	Éléments de $\mathscr{D}$
0	$]1, +\infty[$	$\emptyset$
1	$\{0\}$ ou $\mathbb{N}^*$	0 ou 1
2	$\mathbb{N}$	0 et 1
3	$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[1]$	0, -1 et 1
4		
5	$\mathbb{Z}[i]$	0, $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$ avec $-1 \leq k \leq 2$.
6	$\mathbb{Z}[j]^*$	$\exp\left(i\frac{2k\pi}{3}\right)$ avec $-2 \leq k \leq 3$.
7	$\mathbb{Z}[j]$	0, $\exp\left(i\frac{2k\pi}{3}\right)$ avec $-2 \leq k \leq 3$.
8		
9	$\mathscr{R}_1$	0, $\exp\left(i\frac{k\pi}{4}\right)$ avec $-3 \leq k \leq 4$.
10		
11		
12		
13	$\mathscr{R}$	0, $\exp\left(i\frac{k\pi}{6}\right)$ avec $-5 \leq k \leq 6$.
14		
15		
16		
17		

II Problème : c'est probablement bon.

Partie A : Franck passe un premier examen.

Franck doit réussir un examen qui consiste en un Q.C.M. (questionnaire à choix multiples) de dix questions numérotées de 1 à 10. Il doit répondre à ces questions dans l'ordre et s'il ne répond pas à une question, *on ne prendra pas en compte les réponses qu'il pourrait apporter aux questions suivantes.*

Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse fait perdre un point et ne pas répondre à une question ne rapporte aucun point.

Franck réussira son premier examen si sa note finale est d'au moins *sept* points.

Franck connaît les bonnes réponses des *six* premières questions. Par contre, pour chacune des quatre questions suivantes, il a une probabilité p de trouver la bonne réponse, avec $0 < p < 1$.

1. Prouver que si Franck ne répond pas à la question numérotée 9, il a intérêt à ne pas répondre à la question numérotée 8 pour réussir son examen.

   Notons X_r, avec $r \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses données après la sixième question et jusqu'à la question numéro r.

Notons S_r, pour $r \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire comptant le nombre de points obtenus en tout par Franck après avoir répondu à la question numéro r.
Remarquons que : $S_r = X_r - [(r-6) - X_r] + 6 = 2X_r + 12 - r$.

Calculons $\mathbb{P}(S_7 \geq 7)$.

$$\begin{aligned} S_7 \geq 7 &\Leftrightarrow 2X_7 \geq 2 \\ &\Leftrightarrow X_7 \geq 1 \end{aligned}$$

Or X_7 suit une loi binomiale de paramètres 1 et p, donc $\mathbb{P}(X_7 \geq 7) = p$ et enfin $\mathbb{P}(S_7 \geq 7) = p$.

Calculons $\mathbb{P}(S_8 \geq 7)$.

$$\begin{aligned} S_8 \geq 7 &\Leftrightarrow 2X_8 \geq 3 \\ &\Leftrightarrow X_8 \geq 1{,}5 \end{aligned}$$

Or X_8 suit une loi binomiale de paramètres 2 et p, donc $\mathbb{P}(X_8 \geq 7) = p^2$ et enfin $\mathbb{P}(S_8 \geq 7) = p^2$.

Une autre rédaction.
Notons S_r, pour $r \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire comptant le nombre de points obtenus en tout par Franck après avoir répondu à la question numéro r.
Notons encore X_r, pour $r \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire comptant le nombre de points obtenus par Franck à la question numéro r et, d'après l'énoncé

x_i	1	-1
$\mathbb{P}(X_r = x_i)$	p	$1-p$

Calculons $\mathbb{P}(S_7 \geq 7)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_7 \geq 7) &= \mathbb{P}(X_7 = 1) \\ &= p \end{aligned}$$

Calculons $\mathbb{P}(S_8 \geq 7)$.

$$\mathbb{P}(S_8 \geq 7) = \mathbb{P}\left[(X_7 = 1) \cap (X_8 = 1)\right]$$

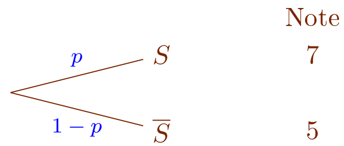
L'énoncé suppose que répondre justement aux questions sont des événements indépendants les uns des autres, et donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_8 \geq 7) &= \mathbb{P}(X_7 = 1) \times \mathbb{P}(X_8 = 1) \\ &= p^2\end{aligned}$$

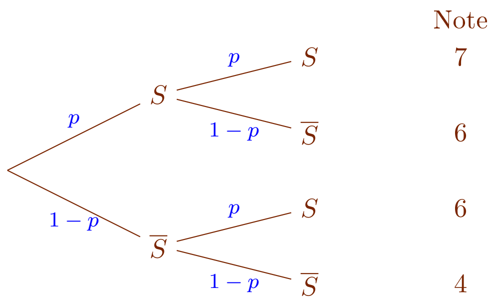
Or $0 < p < 1$, donc $p^2 < p$.
Finalement

> Franck a donc une plus forte probabilité de réussir son examen en s'arrêtant après la question 7 plutôt qu'après la 8.

Nous pouvions également raisonner en usant d'un arbre probabiliste pondéré.
Notons S l'événement « Franck répond correctement à une question ».
S'il répond jusqu'à la question 7, alors



S'il répond jusqu'à la question 8, alors



2. Franck a-t-il intérêt à répondre à la question numérotée 10 ?

   Calculons $\mathbb{P}(S_{10} \geq 7)$.

3. Déterminer selon la valeur de p quelle est la meilleure stratégie pour Franck.

Partie B : Franck passe un second examen.

Franck passe maintenant un second examen consistant encore en un Q.C.M., formé cette fois de 50 questions. Les modalités de cet examen sont les mêmes que celles du précédent. Ainsi Franck doit répondre à ces questions dans l'ordre et s'il ne répond pas à une question, *on ne prendra pas en compte les réponses qu'il pourrait apporter aux questions suivantes*. Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse fait perdre un point et ne pas répondre à une question ne rapporte aucun point.