Capes de mathématique 2025 épreuve 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Cette épreuve est constituée de trois problèmes indépendants.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des nombres réels non nuls.

Problème 1 : vrai-faux.

Pour chacun des items suivants, préciser si l'assertion finale est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Calculs dans $\mathbb{R}$.

1. Un article taxé à 10 % a été payé 110 euros TTC (toutes taxes comprises).
   Le montant de la taxe est de 11 euros.

   Valeur hors taxe : $\frac{110}{1+\frac{10}{100}} = 100$.
   Montant de la taxe : $110 - 100 = 10$.

   $$\boxed{\text{L'assertion 1 est fausse.}}$$

2. Soient α et β deux nombres réels.
   Le nombre $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ est positif.

   Si α et β sont de même signe $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ est clairement positif.
   Si α et β sont de signes contraires alors de $(\alpha+\beta)^2 \geqslant 0$ on déduit $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \geqslant -\alpha\beta \geqslant 0$.

   $$\boxed{\text{L'assertion 2 est vraie.}}$$

3. Soient a et b deux nombres réels.
   La négation de $(a > 1 \text{ et } b > 1 \Rightarrow a+b > 2)$ est $(a \leqslant 1 \text{ ou } b \leqslant 1 \Rightarrow a+b \leqslant 2)$.

   La négation de l'implication $(a > 1 \text{ et } b > 1) \Rightarrow (a+b > 2)$ est :
   $(a > 1 \text{ et } b > 1)$ et non $(a+b > 2)$ ou encore $(a > 1 \text{ et } b > 1)$ et $(a+b \leqslant 2)$.

   L'assertion 3 est fausse.

4. On considère l'équation d'inconnue réelle x : $\cos(2025x) = 1$.
   Cette équation admet 2025 solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

$$\begin{aligned}\cos(2025x) = 1 &\iff 2025x \equiv 0 \mod 2\pi \\ &\iff x \equiv 0 \mod \frac{2\pi}{2025}\end{aligned}$$

   Il ya donc bien 2025 racines à cette équation dans un intervalle semi-ouvert d'amplitude 2π.

   L'assertion 4 est vraie.

Arithmétique.

5. Soit $f;\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = 8n^2 - 10n + 3$.
   L'application f est injective.

   $f(n) = 8\left(n - \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{1}{8}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{N} \cap [2, +\infty[$.
   De plus $f(0) = 3$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 15$ donc f est injective.

   L'assertion 5 est vraie.

6. Pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

$$\begin{aligned}2^{3n} - 1 &\equiv 8^n - 1 \mod 7 \\ &\equiv 1^n - 1 \mod 7 \\ &\equiv 0 \mod 7\end{aligned}$$

L'affirmation 6 est vraie.

7. Soient a, b et n trois entiers naturels avec n non nul tels que a est congru à b modulo n.
   Pour tout entier x, on a $x^a \equiv x^b\ [n]$.

   $8 \equiv 1 \mod 7$.
   D'une part $2^8 \equiv 32 \mod 7 \equiv 4 \mod 7$ et d'autre part $1^8 \equiv 1 \mod 7$ donc $2^8 \not\equiv 2^1 \mod 7$.

   L'affirmation 7 est vraie.

8. Soit n un entier strictement positif.
   La somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Démonstration par récurrence.

   L'affirmation 8 est vraie.

Analyse réelle.

9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -4u_n$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

   Suite géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3 \times (-4)^n$.
   $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = +\infty$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

   L'affirmation 9 est fausse.

10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$.
    La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite.

    $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

    L'affirmation 10 est vraie.

11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels admettant une limite finie strictement positive.
    La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang.

    Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+^*$: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$.

    En particulier : $\exists N_{1/2\ell} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_{1/2\ell} \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{1}{2}\ell$.

    Par conséquent : $\forall n \geqslant N_{1/2\ell}, u_n > \frac{1}{2}\ell > 0$.

    L'affirmation 11 est vraie.

12. Soit f une fonction définie et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
    Soit u_0 un réel et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de premier terme u_0 et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
    La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

    Notons $f(x) = -x^3$ et $u_0 = 2$.
    f est strictement décroissante mais $u_1 = -2^3$ et $u_2 = 2^6$. Puisque $u_1 < u_2$ la suite n'est pas strictement décroissante.

    L'affirmation 12 est fausse.

13. L'équation $\mathrm{e}^x = x + 1$ admet 0 comme unique solution sur $\mathbb{R}$.

    $x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\mathrm{e}^0 = 0 + 1$ il n'y a qu'une seule solution.

    L'affirmation 13 est fausse.

14. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un réel de I et f une fonction, définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
    Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.

    La fonction valeur absolue est continue en 0 mais pas dérivable en 0 (nombres dérivés à droite et à gauche égaux à 1 et -1).

    L'affirmation 14 est fausse.

15. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \int_0^x e^{-t}\ dt$.
La fonction f est bornée sur $[0;+\infty[$.

$f(x) = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}$. f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante donc $f(0) \geqslant f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

L'affirmation 15 est vraie.

16. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\ dx$.
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0;1]$, $x \geqslant 1$ donc $x^{n+1}e^{-x} \geqslant x^n e^{-x}$ les nombres étant tous positifs. Par positivité de l'intégrale : $I_{n+1} \geqslant I_n$.

L'affirmation 16 est vraie.

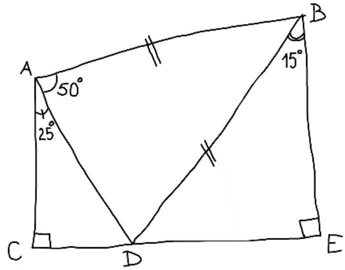
17. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_1^e t\,(\ln(t))^n\ dt$.
Pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 + (n+1)I_n\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $I_{n+1} = \left[\frac{1}{2}t^2\,(\ln(t))^{n+1}\right]_1^e - \int_0^e \frac{1}{2}t^2(n+1)\frac{1}{t}\,(\ln(t))^n\ dt = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}(n+1)\int_1^e t\,(\ln(t))^n\ dt = \frac{1}{2}\left(e^2 - (n+1)I_n\right)$.

L'affirmation 17 est fausse.

Géométrie.

18. La figure codée ci-dessous, réalisée à main levée, représente une configuration géométrique du plan affine euclidien.



Les points C, D et E de cette configuration sont alignés.

La mesure de l'angle $\widehat{CDE} = (90 - 25) + 50 + (90 - 15) = 190$.

L'affirmation 18 est fausse.

19. On considère un triangle ABC du plan affine euclidien tel que $AB = 4$, $BC = 8$ et $CA = 4\sqrt{3}$.
L'angle géométrique $\widehat{ABC}$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\cdot BC\cdot\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right\|^2\right.$
$\frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 - AC^2\right) = 16$.
D'où : $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = \frac{16}{BA\cdot BC} = \frac{1}{2}$ donc $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \mod 2\pi$ ou $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) \equiv -\frac{\pi}{3} \mod 2\pi$.

L'affirmation 19 est vraie.

20. Dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère les points $A(1;2)$, $B(3;1)$ et $M(5x;x^2-1)$ où x est un nombre réel.
Les points A, B et M sont alignés si et seulement si $x = 1$.

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} 5x-1 & 2 \\ x^2-3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff -2x^2 - 5x + 7 = 0 \\ &\iff x \in \left\{1, -\frac{7}{2}\right\} \end{aligned}$$

L'affirmation 20 est fausse.

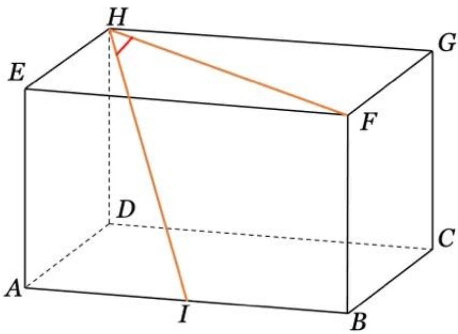
21. On considère un plan (P) de l'espace et trois points A, B et C non alignés n'appartenant pas à (P), tels que la droite (AB) coupe (P) en C', la droite (BC) coupe (P) en A' et la droite (AC) coupe (P) en B'.

Les points A', B' et C' sont alignés.

$(AB) \subset (ABC)$ donc $C' \in (ABC)$. De même $A', B' \in (ABC)$. Ainsi $A', B', C' \in (ABC) \cap (P)$.
La configuration permet de dire que (ABC) et (P) ne sont pas parallèles donc leur intersection est une droite.

L'affirmation 21 est vraie.

22. On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ d'un espace affine euclidien de dimension 3, avec $AB = 5$, $AD = 4$ et $AE = 3$ et I le milieu de $[AB]$, conformément à la figure ci-dessous.



La mesure de l'angle $\widehat{FHI}$ arrondie au degré près est 45°.

On se place dans le repère $\left(A; \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{AD}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{AE}\overrightarrow{AE}\right)$. On a : $I\left(\frac{5}{2}, 0, 0\right)$, $F(5,0,3)$ et $H(0,4,3)$. $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}5/2\\-4\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix}5\\-4\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HF} = \frac{57}{2}$.

Or $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HF} = HI \times HF \cos(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HF})$ et $HI = \sqrt{31{,}25}$, $HF = \sqrt{41}$ donc $\cos(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HF}) = \frac{57}{2\sqrt{31{,}25}\sqrt{41}}$ d'où $\widehat{FHI}$ mesure approximativement 37,23°.

L'affirmation 22 est fausse.

23. Le nombre complexe $e^{2i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}$ admet $\frac{\pi}{12}$ pour argument.

$$\begin{aligned}
e^{2i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} &= e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}\right] \\
&= e^{i\frac{\pi}{12}}\left[e^{i\frac{7\pi}{12}} + e^{-i\frac{7\pi}{12}}\right] \\
&= 2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}} \\
&= -2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}} \\
&= 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\pi\right)}
\end{aligned}$$

L'affirmation 23 est fausse.

Algèbre linéaire.

24. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de la norme associée notée $||.||$.
Deux vecteurs u et v de E sont orthogonaux si et seulement si $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

Dire que u et v sont orthogonaux équivaut successivement à

$$u \cdot v = 0$$
$$\frac{1}{2}\left(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right) = 0$$
$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

L'affirmation 24 est vraie.

25. On considère la matrice A de $M_2(\mathbb{C})$, définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le produit des valeurs propres de A est égal à 2.

Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - \det(A)X + \mathrm{tr}(A) = X^2 - 2X + 2$ donc le produit de ses valeurs propres est 2.

L'affirmation 25 est vraie.

26. On considère une matrice carrée A de taille n diagonalisable ($n \in \mathbb{N}^*$).
La matrice A^2 est diagonalisable.

A est diagonalisable : $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\exists D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{K})$, $A = PDP^{-1}$.
D'où : $A^2 = PDP^{-1}PAP^{-1} = PD^2P^{-1}$. Or un produit de matrices diagonales est diagonale.

L'affirmation 26 est vraie.

Dénombrement et probabilités.

27. 20 personnes, dont 13 femmes, sont convoquées à un entretien. Les candidats sont reçus individuellement. La liste fixant l'ordre de passage a été établie par un tirage au sort équiprobable parmi l'ensemble des listes possibles.
La probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une femme sachant que le premier candidat interrogé est une femme est égale à $\dfrac{12}{19}$.

On change de modélisation : 20 tirages successifs sans remise avec équiprobabilité pour chaque tirage. La probabilité que le deuxième tirage soit une femme sachant que le premier est une femme est la probabilité de choisir l'une des 12 femmes restant parmi les 19 personnes : $\frac{12}{19}$.

L'affirmation 27 est vraie.

28. On lance trois dés à six faces numérotées de 1 à 6 et on fait la somme des résultats obtenus.
Le programme ci-dessous est écrit en langage Python.

```
1 from math import*
2 n=int(input("Entrez un entier compris entre 3 et 18:"))
3 s=0
4 for i in range(1,7):
5     for j in range(1,7):
6         for k in range(1,7):
7             if i+j+k==n:
8                 print(i,j,k)
9 s=s+1
10 print("Le nombre de facons d'obtenir",n,"avec trois des
    est:",s)
```

La ligne 10 de ce programme donne le nombre de façons d'obtenir pour somme l'entier n, saisi par l'utilisateur.

L'instruction `s=s+1` est hors boucles donc à la fin du programme s vaut 1.

L'affirmation 28 est fausse.

Problème 2 : meilleure approximation affine.

Ce problème a pour objet de s'intéresser à la notion de meilleure approximation affine d'une fonction en un point.

Définitions.

Soit f une fonction d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert non vide I.

Pour tout réel $a \in I$, on appelle approximation affine de f en a toute fonction affine g définie sur I telle que

$$g(a) = f(a).$$

Soient g_1 et g_2 deux approximations affines de f en a. Dire que g_1 est une meilleure approximation affine de f en a que g_2 signifie qu'il existe un intervalle ouvert D contenant a tel que

$$\forall x \in I \cap D,\ |f(x) - g_1(x)| \leqslant |f(x) - g_2(x)|.$$

Si de plus f est dérivable sur I de dérivée f', pour tout $a \in I$, on appelle fonction affine tangente de f au point a la fonction t définie sur I par

$$\forall x \in I,\ t(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Étude d'un exemple.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x.$$

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   f est une fonction polynomiale (combinaison linéaire de puissances) donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

   $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ donc $\mathscr{C}_f$ est une parabole orientée vers le haut de sommet de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

3. Déterminer la fonction t affine tangente à f en 0. Tracer la tangente en 0 sur la figure précédente.

   $t(x) = 0 - 1(x - 0) = -x$. $\mathscr{C}_t$ est la droite passant par l'origine du repère et le point de coordonnées $(1, -1)$.

4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = -\frac{1}{2}x.$$

   (a) Justifier que h est une approximation affine de f en 0. Tracer la courbe représentative de h sur la même figure.

   h est affine et $h(0) = f(0)$.

   (b) Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - t(x)| \leqslant |f(x) - h(x)| \Leftrightarrow |x| \leqslant \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$. $|f(x)-t(x)| \leqslant |f(x)-h(x)| \Leftrightarrow |x^2-x+x| \leqslant |x^2-x+\frac{1}{2}x| \Leftrightarrow$ $|x| \cdot |x| \leqslant |x| \cdot |x - \frac{1}{2}|$.
   En distinguant suivant que $x = 0$ ou pas on obtient l'équivalence souhaitée.

(c) En déduire que t est une meilleure approximation affine de t en 0 que h.

Notons $D = \left]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. $\forall x \in D$, $|x| \leqslant \left|x - \frac{1}{2}\right|$. On conclut d'après la question précédente et la définition de meilleur approximation affine.

5. Pour tout réel $k \neq -1$, on note g_k la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_k(x) = kx.$$

(a) Justifier que g_k est une approximation affine de f en 0.

g_k est affine et $g_k(0) = f(0)$.

(b) Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - t(x)| \leqslant |f(x) - g_k(x)| \Longleftrightarrow |x| \leqslant |x - (1 + k)|.$$

$$\begin{aligned} & |f(x) - t(x)| \leqslant |f(x) - g_k(x)| \\ \Longleftrightarrow\ & |x^2| \leqslant |x^2 - (1 + k)x| \\ \Longleftrightarrow\ & |x| \leqslant |x - (1 + k)| \end{aligned}$$

en distinguant $x = 0$ et $x \neq 0$.

(c) Démontrer que

$$\forall x \in \left]-\left|\frac{1+k}{2}\right|, \left|\frac{1+k}{2}\right|\right[,\ |f(x) - t(x)| \leqslant |f(x) - g_k(x)|$$

$\forall x \in \left]-\left|\frac{1+k}{2}\right|, \left|\frac{1+k}{2}\right|\right[$, $|x| \leqslant |x - (1 + k)|$ donc, d'après la question précédente : $\forall x \in \left]-\left|\frac{1+k}{2}\right|, \left|\frac{1+k}{2}\right|\right[$, $|f(x) - t(x)| \leqslant |f(x) - g_k(x)|$.

6. Que peut-on en conclure pour la fonction t ?

t est une meilleur approximation affine que toutes les g_k.

Cas général.

On suppose ici que $I = \mathbb{R}$ et que la fonction f est dérivable sur I.

7. Démontrer que g est une approximation affine de f en a si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(a) + k(x-a).$$

g est une approximation affine de f en a si et seulement si g est affine et $g(a) = f(a)$. Autrement dit si et seulement si il existe des réels m et p tels que : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = mx + p \\ g(a) = f(a) \end{cases}$

Or $ma + p = f(a) \iff p = f(a) - ma$ donc g est une approximation affine de f en a si et seulement si il existe un réel m tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(a) + m(x-a)$.

Soit g une approximation affine de f en a telle que $k \neq f'(a)$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$,

$$T(x) = \frac{f(x) - t(x)}{x-a}$$
$$G(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x-a}$$

8. Déterminer les limites des fonctions T et G en a.

$T(x) = \frac{f(x) - \left[f(a) + f'(a)(x-a)\right]}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$

$G(x) = \frac{f(x) - [f(a) + k(x-a)]}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - k \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a) - k.$

9. Que peut-on en conclure pour la fonction t ?

D'après la question précédente quel que soit $k \in \mathbb{R}$ il existe un voisinage ouvert de a tel que : $|T(x)| \leqslant |G(x)|$.

Et donc : $|f(x) - t(x)| \leqslant |f(x) - g(x)|$.

La meilleur approximation affine de f en a est t.

Relation d'ordre.

10. Rappeler la définition d'une relation d'ordre.

    Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire dans E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si et seulement si elle vérifie les trois conditions suivantes :

    (i) $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.

    (ii) $\forall (x,y) \in E^2,\ \left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{array}\right. \Rightarrow x = y$.

    (iii) $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right. \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

11. Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I. La relation « être une meilleure approximation affine de f en a que » constitue-t-elle une relation d'ordre dans l'ensemble des approximations affines de f en a ?

    La réflexivité ne pose pas de problème.
    La transitivité doit se faire sur $I \cap D \cap D'$.
    L'antisymétrie n'est pas vérifiée. Nous pouvons exhiber un contre-exemple : $f(x) = 0$, $a = 0$, $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = -x$.

Problème 3 : dérangements.

Ce problème a pour objet de déterminer le nombre de dérangements d'un ensemble fini.

Notations, définitions et rappels.

Soit n un entier naturel non nul et soit E_n le sous ensemble de $\mathbb{N}$ défini par $E_n = \{1,2,\ldots,n\}$.

On appelle permutation de E_n toute bijection de E_n dans lui-même. Soit σ une permutation de E_n et i un élément de E_n. Dire que i est un point fixe de σ signifie que $\sigma(i) = i$.

On appelle *dérangement* de E_n une permutation de E_n n'ayant aucun point fixe.

On note S_n l'ensemble des permutations de E_n.
On rappelle que le cardinal de S_n est $n!$.
On note D_n l'ensemble des dérangements de E_n.
Le cardinal de D_n est noté d_n.

Généralités.

Dans cette partie, E désigne un ensemble fini non vide.
A_1, A_2 et A_3 sont des parties de E.

1. Justifier l'égalité
$$\operatorname{card}(A_1 \cup A_2) = \operatorname{card}(A_1) + \operatorname{card}(A_2) - \operatorname{card}(A_1 \cap A_2)$$
où card désigne le cardinal des ensembles considérés.

2. En s'inspirant de la relation précédente et en illustrant la réponse par un schéma, donner sans démonstration une expression de $\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, en fonction des cardinaux des intersections de ces parties.

Dans la suite, on admettra la formule du crible ci-dessous qui constitue une généralisation des deux précédentes.

Étant données n parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un ensemble E fini non vide, on a
$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})\right).$$

3. Retrouver à l'aide de la formule du crible la réponse obtenue à la question 2.

Calcul du nombre de dérangements.

4. Donner les valeurs de d_1 et d_2.

Pour tout entier i élément de E_n, on note A_i l'ensemble des permutations admettant au moins i pour point fixe.
$$A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}.$$

5. Démontrer que
$$S_n \setminus D_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

6. Étant donné un entier k de E_n et k entiers deux à deux distincts $i_1, i_2, \ldots, i_k$ justifier l'égalité
$$\operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (n-k)!.$$

7. Déduire des deux questions précédentes et de la formule du crible que
$$d_n = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)!.$$

8. Démontrer que
$$d_n = n! \sum_{0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Applications.

9. On note p_n la probabilité qu'une permutation choisie au hasard de façon équiprobable dans S_n soit un dérangement.
   La suite (p_n) admet-elle une limite ? Si oui laquelle ?

10. On répartit au hasard n boules numérotées de 1 à n dans n urnes numérotées de 1 à n, en plaçant une boule par urne.
    On note X_n la variable aléatoire qui à une telle répartition associe le nombre de coïncidences entre le numéro de l'urne et celui de la boule qu'elle reçoit.

    (a) Déterminer $P((X_n = 0)$ et en déduire une expression de $P(X_n \geqslant 1)$.

    (b) Démontrer que pour tout entier q de E_n, on a
    $$P(x = q) = \frac{1}{q!}\sum_{k=0}^{n-q}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

    (c) Démontrer que l'espérance de X_n est indépendante de n.
    On pourra écrire X_n sous forme d'une somme de variables aléatoires.