Capes de mathématique 2024 épreuve 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Problème 1 : vrai-faux.

Proportionnalité.

1. Déterminons pour qu'elle condition nécessaire et suffisante le tableau est de proportionnalité.

   Il est de proportionnalité si et seulement si

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1-m & -3\\ 8 & 1+m\end{vmatrix}=0 &\Leftrightarrow (1-m)(1+m)-8\times(-3)=0\\ &\Leftrightarrow 25-m^2=0\\ &\Leftrightarrow (5-m)(5+m)=0\\ &\Leftrightarrow m\in\{-5;5\}\end{aligned}$$

   L'assertion est fausse.

2. En considérant les coefficients multiplicateurs :

$$\left(1+\frac{55}{100}\right)\left(1+\frac{-28}{100}\right)=1,116=1+\frac{11,6}{100}.$$

   L'évolution globale est une augmentation de $11,6$ %

   L'affirmation est fausse.

3.

$$\pi\left[\left(1+\frac{22}{100}\right)R\right]^2=1,4884\times\pi R^2$$

   L'aire du disque est donc augmentée de $48,84$ %.

   L'affirmation est fausse.

Analyse.

4. * Ce premier point ne sert à rien mais je ne le savais pas encore en rédigeant.
   $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est décroissante sur $[0;1]$ donc : $\forall t \in [0;1],\ \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$.
   En intégrant sur $[0;1]$ les fonctions étant continues : $\mathrm{e}^{-1} \leqslant F(1)$.
   * $\forall t \in [0;1],\ -t^2 \geqslant -t$.
   Donc : $\forall x \in [0;1],\ \mathrm{e}^{-t^2} \geqslant \mathrm{e}^{-t}$.
   Comme les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ sont continues, positives mais pas égales, en intégrant sur $[0;1]$: $F(1) > \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   Autrement dit : $F(1) > -\mathrm{e}^{-1} + 1$.

   D'après ce deuxième point

   $$\boxed{\text{la proposition est fausse.}}$$

5. Déterminons la limite proposée.

   $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ donc, en procédant à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} A(t) &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}t^3\ln(t) - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^t \\ &= \frac{1}{3}t^3\ln(t) - \frac{1}{9}t^3 + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

   Nous en déduisons : $\frac{A(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}t\ln(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

   $$\boxed{\text{L'assertion est vraie.}}$$

6. Supposons qu'il existe une suite vérifiant :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A).$$

   Nous avons donc pour un $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé : $\forall A \in \mathbb{R},\ u_{n_0} \geqslant A$. Formulons la chose en français : u_0 est un nombre plus grand que tous les nombres réels. Ceci est impossible.
   Il n'existe aucune suite vérifiant l'assertion proposée, l'assertion est toujours fausse.

Donc l'implication « si : $\exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A)$, alors (u_n) tend vers $+\infty$ » est vraie. L'hypothèse de l'implication étant fausse, quelle que soit la conclusion l'implication toute entière sera vraie. On peut alors tout affirmer, y compris que le niveau du capes de math reste inchangé.

Arithmétique.

7. En procédant à la division posée en potence :

$$\begin{array}{rr|l}
 & 3 & 11 \\ \cline{3-3}
- & \underline{0} & 0{,}27 \\
 & 30 & \\
- & \underline{22} & \\
 & 80 & \\
- & \underline{77} & \\
 & 3 &
\end{array}$$

donc $\frac{3}{11} = 0,272727\ldots.$

$$\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$$

8. Contre-exemple :$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

$$\boxed{\text{L'assertion est fausse.}}$$

9.

10. Contre-exemple : 3 est divisible par 3 mais pas par 9.

$$\boxed{\text{L'assertion est fausse.}}$$

11. Contre-exemple : $2 \times 6 \equiv 2 \times 12 \pmod 4$ et pourtant $6 \not\equiv 12 \pmod 4$.

$$\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$$

12. Contre-exemple : $1 + 3 + 5 = 9$ et $(2 \times 3 + 1)^2 = 49$.

$$\boxed{\text{L'assertion est fausse.}}$$

13. Un entier est divisible par 5 s'il est congru à 0 ou 5 modulo 10.
En considérant les carrés d'entiers de $[\![0,10]\!]$ nous remarquons qu'il sont congrus à 0 ou 1 ou 4 ou 5 ou 6 ou 9 modulo 10.
Représentons les sommes b^2+c^2 modulo 10 par une table :

b^2 \ c^2	0	1	4	5	6	9
0	0	1	4	5	6	9
1	1	2	5	6	7	0
4	4	5	8	9	0	3
5	5	6	9	0	1	4
6	6	7	0	1	2	5
9	9	0	3	4	5	8

Comme nous voulons un triplet pythagoricien il faut retirer ceux, en rouge dans le tableau, qui ne peuvent pas correspondre à des carrés parfaits.
Enlevons tous les cas, en bleu ci-dessous, pour lesquels c ou b est divisible par 5.

b^2 \ c^2	0	1	4	5	6	9
0	0	1	4	5	6	9
1	1	2	5	6	7	0
4	4	5	8	9	0	3
5	5	6	9	0	1	4
6	6	7	0	1	2	5
9	9	0	3	4	5	8

Nous constatons que dans les cas restants a est nécessairement divisible par 5.

L'assertion est vraie.

Le raisonnement précédent est très élémentaire et peut être expliqué à un collégien en parlant de nombre dont le chiffre des unités est 0 ou 5 plutôt que de congruence.

Géométrie.

14. Si x est une mesure en degré du plus petit angle alors : $x+2x+3x=180 \iff x=30$. Ainsi $3x=90$ et donc

l'assertion est vraie.

15. Un schéma met en évidence que ABE et ADC sont superposables. En effet par construction : $AD = AB$, $AE = AC$ et (en confondant les angles et leurs mesures) $\widehat{EAB} = \widehat{EAC} + \widehat{CAB} = 60 + \widehat{CAB} = \widehat{CAB} + 60 = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$.

L'assertion est vraie.

On peut aussi remarquer que les triangles sont isométriques via la rotation de centre A et d'angle 60°. La précédente démonstration me semble encore plus élémentaire.

16. * Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.
Or $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$, vecteurs directeurs respectivement de D et D', ne sont pas colinéaires donc D et D' ne sont pas parallèles.
* Si $M \in D \cap D'$ alors il existe $(t_M, s_M) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} 1 + t_M = 1 + s_M \\ 3 - t_M = 3 - s_M \\ 5 - 2t_M = -5s_M - 1 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} t_M = s_M \\ t_M = s_M \\ t_M = \frac{5}{2}s_M + 3 \end{cases}$$

Puisque $t_M = -2 = s_M$ est solution de ce système les droites sont sécantes.

L'affirmation est vraie.

La première partie concernant le non parallélisme est, *a posteriori*, inutile.

17. Par lecture graphique $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BG}\right)$ est une base de la direction de (ABG) et $B \in (ABG)$.
$K \in (ABG)$ si et seulement si : $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{BK} = \alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{BG}$.

Or, dans le repère de l'énoncé, $B(1,1,0)$, $A(1,0,0)$ et $G(0,1,1)$ donc $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}8\\-11\\-8\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Par conséquent : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{BK}=\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BG}$, équivaut successivement à

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 8 & = & \alpha\times 0 & + & \beta\times(-1) \\ -11 & = & \alpha\times(-1) & + & \beta\times 0 \\ -8 & = & \alpha\times 0 & + & \beta\times 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 11 \\ \beta = -8 \end{array}\right.$$

Ainsi $\overrightarrow{BK}=11\overrightarrow{BA}-8\overrightarrow{BG}$.

L'affirmation est vraie.

Dénombrement. Probabilités.

18. Si une partie Q de E contient a alors il existe une partie $P=Q\setminus\{a\}$ est l'unique partie de E ne contenant pas a telle que $Q=\{a\}\cup P$.

    Autrement dit il y a une bijection entre l'ensemble des parties de E contenant a et celles ne contenant pas a.

    L'assertion est vraie.

19. Un chemin court est formé 10 déplacements : 7 déplacements vers la droite et 3 vers le haut.

    Cela revient à choisir une sous-ensemble de trois éléments de $[\![1;10]\!]$: $\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!(10-3)!}=\frac{10\times9\times8}{3\times2}=120$.

    L'assertion est vraie.

20. Notons X la variable aléatoire réelle comptant le nombre d'appels téléphonique reçus pendant une heure. D'après l'énoncé $X\hookrightarrow\mathcal{P}(8)$.

Dans ce cas, par convergence de la série exponentielle

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>3) &= \sum_{k=4}^{+\infty} \mathrm{e}^{-8}\frac{8^k}{k!} \\ &= 1-\mathrm{e}^{-8}\sum_{k=0}^{3}\frac{8^k}{k!} \\ &\approx 0,9576\end{aligned}$$

L'assertion est vraie.

21. Dire que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) \\ \mathbb{P}\left(\overline{A\cup B}\right) &= (1-\mathbb{P}(A))\,(1-\mathbb{P}(B)) \\ 1-\mathbb{P}(A\cup B) &= 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ 1-(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)) &= 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

L'assertion est vraie.

22.

Algorithmique.

23. L'instruction $m=(a+b)/2$ n'étant pas dans la boucle *while* la valeur de m n'est pas modifiée et $b-a$ ne diminue pas. Il y aura une boucle infinie.

L'assertion est fausse.

Problème 2 : quelques modèles de dynamique d'une population.

Le modèle logistique discret.

1. f_a est polynomiale donc dérivable sur $[0,1]$ et : $\forall x \in [0,1],\ f_a'(x) = a(1-2x)$.
   Comme : $a(1-2x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$, puisque $a > 0$, et $a(1-2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f_a'		$+$	0	$-$	
f_a	0	$\nearrow$	$\frac{a}{4}$	$\searrow$	0

2. $v_0 \in]0,1[$, or, d'après la question précédente $f_a(]0,1[) \subset \left[0, \frac{a}{4}\right]$ avec $a \leqslant 1$ donc $v_1 = f_a(v_0) \in [0,1]$.
   En itérant (récurrence évidente) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [0,1].}$$

3. f_a est polynomiale donc continue sur $[0,1]$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc, par composition : $f_a(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.
   De plus $v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $f_a(v_n) = v_{n+1}$ donc, par unicité de la limite, $f_a(\ell) = \ell$.

$$\boxed{\text{Si } v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \text{ alors } f_a(\ell) = \ell.}$$

4. Raisonnons par disjonction des cas.

   * $f_a(0) = 0$.
   * Soit $x \in]0;1]$.

$$\begin{aligned} f_a(x) = x &\Leftrightarrow ax(1-x) = x \\ &\Leftrightarrow a(1-x) = 1 \end{aligned}$$

   - Si $a = 1$ alors

$$f_a(x) = x \Leftrightarrow x = 0$$

   ce qui contredit $x \in]0;1]$.

- Si $a \in]0;1[$ alors

$$f_a(x) = x \iff x = \frac{a-1}{a}$$

  Or $\frac{a-1}{a} < 0$ contredit le fait que $x \in]0;1]$ et donc $f_a(x) \neq x$.

Ainsi

$$\boxed{\text{le seul point fixe de } f_a \text{ sur } [0;1] \text{ est } 0.}$$

5. Soit $x \in]0;1[$.

$$1 - \frac{1}{a} \leqslant\leqslant 0 \leqslant x$$

Nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned} \frac{a-1}{a} &\leqslant x \\ a-1 &\leqslant ax \text{ car } a > 0 \\ a - ax - 1 &\leqslant 0 \\ a(1-x) - 1 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

et puisque $x > 0$

$$ax(1-x) - x \leqslant 0$$

Autrement dit

$$\boxed{\forall x \in]0;1[,\ g_a(x) \leqslant 0.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$g_a(v_n) \leqslant 0 \iff f_a(v_n) \leqslant v_n \iff v_{n+1} \leqslant v_n$.

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

7. D'après la question 2 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et d'après la question précédente elle est décroissante donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
D'après la question 3 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe. Or, d'après la question 4, 0 est l'unique point fixe dans $[0;1]$ de f_a et donc

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

8. $\boxed{\text{La taille de la population se rapproche de } 0.}$

9. Soit $x \in [0;1]$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{5}{2}x(1-x) = x \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \frac{5}{2}(1-x) = 1 \\ &\iff x = \ \text{ ou } x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Or $\left(0, \frac{3}{5}\right) \in ([0;1])^2$ donc

$$\boxed{f \text{ admet exactement deux points fixes dans } [0;1].}$$

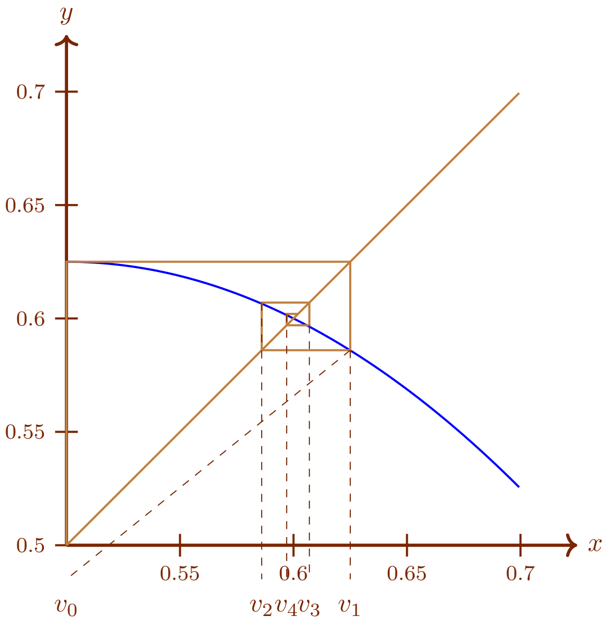
10. $\boxed{v_1 = 0,625,\ v_2 \approx 0,586,\ v_3 \approx 0,607 \text{ et } v_4 \approx 0,597.}$

11.

```
def fonction(a,v,n):
  L=[v]
  for k in range(1,n+1):
    L=L+[a*L[k-1]*(1-L[k-1])]
  return L
```

Puis on lance l'instruction $fonction(5/2, 1/2, 10)$.

$$\boxed{v_{10} \approx 0,59994785899.}$$



12.

13. Soit $x \in [0;1]$.
D'une part

$$
\begin{aligned}
h(x) &= f \circ f(x) - x \\
&= \frac{5}{2} f(x)\left(1 - f(x)\right) - x \\
&= \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} x(1-x)\left(1 - \frac{5}{2}x(1-x)\right) - x \\
&= \frac{25}{4}(x - x^2)\left(1 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x^2\right) - x \\
&= \frac{25}{4}\left(x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^4\right) - x \\
&= -\frac{125}{8}x^4 + \frac{125}{4}x^3 - \frac{175}{8}x^2 + \frac{21}{4}x
\end{aligned}
$$

d'autre part

$$
\begin{aligned}
&-\frac{x(5x-3)(25x^2-35x+14)}{8}\\
&=-\frac{1}{8}\left(5x^2-3x\right)\left(25x^2-35x+14\right)\\
&=-\frac{1}{8}\left(125x^4-175x^3+70x^2-75x^3+105x^2-42x\right)\\
&=-\frac{1}{8}\left(125x^4-225x^3+175x^2-42x\right)\\
&=-\frac{125}{8}x^4+\frac{125}{4}x^3-\frac{175}{8}x^2+\frac{21}{4}x
\end{aligned}
$$

donc, par unicité de la forme développée, réduite et ordonnée d'un polynôme :

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ h(x) = -\tfrac{x(5x-3)(25x^2-35x+14)}{8}.}$$

14. Par construction les points fixes de $f \circ f$ sont les zéros de h.
Le discriminant de $25X^2 - 35X + 14$ est $(-35)^2 - 4 \times 25 \times 14 = -175 < 0$ donc ce polynôme n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$.
Ainsi les zéros de h sont 0 et $\frac{3}{5}$.

$$\boxed{\text{Les points fixes de } f \circ f \text{ dans } [0;1] \text{ sont } 0 \text{ et } \tfrac{3}{5}.}$$

15. D'après la réponse apportée à la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R},\ 25x^2 - 35x + 14 > 0$.
De plus :
$$\forall x \in \left]0, \frac{3}{5}\right[,\ \left\{\begin{array}{l} -\frac{x}{8} < 0 \\ 5x-3 < 0 \end{array}\right.$$
donc
$$\boxed{h(0) = h\left(\tfrac{3}{5}\right) = 0 \text{ et : } \forall x \in \left[0, \tfrac{3}{5}\right],\ h(x) > 0.}$$

16. $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ est stable par $f \circ f$, $v_0 \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{2n+2} = f \circ f(v_{2n}),$$
donc, en raisonnant par récurrence, nous démontrerions :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{2n} \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right].$$

Enfin, h étant strictement positive sur $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ h(v_{2n}) \geqslant 0$$

ce qui équivaut, par construction de h et $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ à

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{2n+2} - v_{2n} \geqslant 0.$$

Autrement dit

$$\boxed{(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

17. Les questions précédentes ont établi que $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc convergente. De plus sa limite ne peut être q'un point fixe de $f \circ f$ dans $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$. Autrement dit

$$\boxed{v_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{5}.}$$

18. f est continue sur $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ et $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{5}$ donc, par composition,

$$f(v_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f\left(\frac{3}{5}\right).$$

Or $f(v_{2n}) = v_{2n+1}$ et $f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$ donc

$$\boxed{v_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{5}.}$$

Puisque les suites extraites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{3}{5}.}$$

19. D'après la question précédente $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{5}M$ donc

$$\boxed{\text{la taille de la population se rapproche de 60 \% du majorant } M.}$$

Le modèle logistique continue.

20. (a) Raisonnons par analyse-synthèse.

* Supposons l'égalité proposée vraie pour tout $z \in]0, M[$.
  Soit $z \in]0, M[$.

$$\frac{1}{z(M-z)} = \alpha\frac{1}{z} + \beta\frac{1}{M-z}$$

équivaut successivement à :

$$\frac{1}{z(M-z)} = \frac{\alpha M - \alpha z + \beta z}{z(M-z)}$$
$$1 = (\beta - \alpha)z + \alpha M$$

Par unicité de l'écriture développée, réduite et ordonnée d'un polynôme :

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{1}{M} \end{cases}$$

* Réciproquement, si $\alpha = \beta = \frac{1}{M}$ l'égalité est clairement vérifiée.

$$\boxed{\forall z \in]0, M[,\ \frac{1}{z(M-z)} = \frac{1}{Mz} + \frac{1}{M^2-Mz}.}$$

$y > 0$ donc l'équation (2) peut s'écrire $\frac{y'(t)}{y(t)(M-y(t))} - a = 0$.
En utilisant le précédent résultat avec $z = y(t)$ on obtient

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{1}{M} \times \frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{y'(t)}{M} \times \frac{1}{M-y(t)} - a = 0.}$$

(b) Puisque $0 < y < M$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\boxed{\Psi : t \mapsto \alpha \ln \circ y(t) - \beta \ln[M - y(t)] - at \text{ est une primitive de } \psi \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

21. $\psi + 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Psi = \lambda$.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

D'après la question précédente :

$$\lambda = \frac{1}{M} \ln\left(\frac{y(t)}{M - y(t)}\right) - at$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{M\lambda + Mat} &= \frac{y(t)}{M - y(t)} \\ \mathrm{e}^{M\lambda}\mathrm{e}^{Mat}(M - y(t)) &= y(t) \\ M\mathrm{e}^{M\lambda}\mathrm{e}^{Mat} &= \left(1 + \mathrm{e}^{M\lambda}\mathrm{e}^{Mat}\right) y(t) \end{aligned}$$

en notant $c = \mathrm{e}^{M\lambda}$, qui est bien strictement positif,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y(t) = \tfrac{Mc\mathrm{e}^{aMt}}{1 + c\mathrm{e}^{aMt}}.}$$

22. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.
En factorisant puis en simplifiant

$$y(t) = \frac{M}{\mathrm{e}^{-aMt} + 1}$$

Or, comme $aM > 0$,

$$\mathrm{e}^{-aMt} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc

$$\boxed{y(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} M.}$$

23. **La taille de la population va atteindre le majorant M.**

Un modèle proies-prédateurs discret.

24. (a) $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.}$$

(b) Par une récurrence immédiate (en multipliant à gauche par A.)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

25. (a) Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(A - XI_2) \\
&= \begin{vmatrix} 1-X & -\alpha \\ \alpha & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)^2 + \alpha^2 \\
&= (1-X)^2 - (i\alpha)^2 \\
&= (1-X-i\alpha)(1-X+i\alpha)
\end{aligned}$$

α étant non nul,

$\lambda = 1 + i\alpha$ et $\mu = 1 - i\alpha$ sont les valeurs propres complexes de A.

(b)

26. $\chi_A(X)$ est scindé simple dans $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et comme ses valeurs propres sont λ et μ

$$\exists P \in \mathcal{G}l_2(\mathbb{C}),\ A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}.$$

27. En tâtonnant ou avec les formules de Cramer ou avec l'algorithme de Gauss-Jordan on peut déterminer la matrice inverse.

Notons $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

On vérifie : $CB = I_2$ donc C est inversible et $C^{-1} = B$.

De plus, en effectuant les produits,

$$\begin{aligned}
C\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}C^{-1} &= \begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ -i\lambda & i\mu\end{pmatrix}C^{-1}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda+\mu & i\lambda-i\mu\\ -i\lambda+i\mu & \lambda+\mu\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\
&= A
\end{aligned}$$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}.}$$

28. Là encore par une récurrence on démontre le résultat. L'initialisation repose sur des conventions de notation pour les puissances et l'hérédité sur :

$$\begin{aligned}
A^2 &= A\times A\\
&= P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \mu^2\end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}$$

29. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
A^n &= P\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= \frac{1}{2}P\begin{pmatrix}\left(re^{i\theta}\right)^n & 0\\ 0 & \left(re^{-i\theta}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}P\begin{pmatrix}r^n e^{in\theta} & 0\\ 0 & r^n e^{-in\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r^n e^{in\theta} & ir^n e^{in\theta}\\ r^n e^{-in\theta} & -ir^n e^{-in\theta}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}r^n\left(e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right) & r^n i\left(e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right)\\ -r^n i\left(e^{in\theta}-e^{in\theta}\right) & r^n\left(e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right)\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}r^n 2\cos(n\theta) & -r^n 2\sin(n\theta)\\ r^n 2\sin(n\theta) & r^n 2\cos(n\theta)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}r^n\cos(n\theta) & -r^n\sin(n\theta)\\ r^n\sin(n\theta) & r^n\cos(n\theta)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} &= A^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}r^n\cos(n\theta) & -r^n\sin(n\theta)\\ r^n\sin(n\theta) & r^n\cos(n\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}r^n\left(\cos(n\theta)x_0-\sin(n\theta)y_0\right)\\ r^n\left(\sin(\theta)x_0+r^n\cos(n\theta)y_0\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} x_n = r^n\left(\cos(n\theta)x_0-\sin(n\theta)y_0\right),\\ y_n = r^n\left(\sin(n\theta)x_0+\cos(n\theta)y_0\right).\end{cases}.}$$

30.

31. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$x_n^2 +_n^2 = r^{2n}\left[\cos^2(n\theta)x_0^2+\sin^2(n\theta)y_0^2+\sin^2(n\theta)x_0^2+\cos^2(n\theta)y_0^2\right]$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ x_n^2+y_n^2 = r^{2n}(x_0^2+y_0^2).}$$