Capes de mathématique 2024 épreuve 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Problème 1 : vrai-faux.

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Proportionnalité.

1. Pour que le tableau ci-dessous soit un tableau de proportionnalité il faut et il suffit que $m = 5$.

$1 - m$	-3
8	$1 + m$

Déterminons pour qu'elle condition nécessaire et suffisante le tableau est de proportionnalité.

Il est de proportionnalité si et seulement si

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-m & -3 \\ 8 & 1+m \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow (1-m)(1+m) - 8 \times (-3) = 0 \\
&\Leftrightarrow 25 - m^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (5-m)(5+m) = 0 \\
&\Leftrightarrow m \in \{-5; 5\}
\end{aligned}$$

L'assertion est fausse.

2. Après une augmentation de 55 %, le coût d'un produit a baissé de 28 %.
Le pourcentage d'augmentation total est de 27 %.

En considérant les coefficients multiplicateurs :

$$\left(1+\frac{55}{100}\right)\left(1+\frac{-28}{100}\right)=1,116=1+\frac{11,6}{100}.$$

L'évolution globale est une augmentation de 11,6 %

$\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$

3. Si l'on augmente son rayon de 22 %, l'aire d'un disque augmente de 44 %.

$$\pi\left[\left(1+\frac{22}{100}\right)R\right]^2=1,4884\times\pi R^2$$

L'aire du disque est donc augmentée de 48,84 %.

$\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$

Analyse.

4. On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par

$$F(t)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On a

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant F(1)\leqslant 1-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

* Ce premier point ne sert à rien mais je ne le savais pas encore en rédigeant.
$t\mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est décroissante sur $[0;1]$ donc : $\forall t\in[0;1],\ \mathrm{e}^{-1}\leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$.
En intégrant sur $[0;1]$ les fonctions étant continues : $\mathrm{e}^{-1}\leqslant F(1)$.
* $\forall t\in[0;1],\ -t^2\geqslant -t$.
Donc : $\forall x\in[0;1],\ \mathrm{e}^{-t^2}\geqslant \mathrm{e}^{-t}$.
Comme les fonctions $t\mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et $t\mapsto \mathrm{e}^{-t}$ sont continues, positives mais pas égales, en intégrant sur $[0;1]$: $F(1)>\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Autrement dit : $F(1)>-\mathrm{e}^{-1}+1$.

D'après ce deuxième point

$$\boxed{\text{la proposition est fausse.}}$$

5. On note pour tout réel $t \geqslant 1$,

$$A(t) = \int_1^t x^2 \ln(x) \, \mathrm{d}x.$$

On a

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{A(t)}{t^2} = +\infty.$$

Déterminons la limite proposée.

$x \mapsto \frac{1}{3}x^3$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ donc, en procédant à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} A(t) &= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x)\right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^t \\ &= \frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{9}t^3 + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Nous en déduisons : $\frac{A(t)}{t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{3}t \ln(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

$$\boxed{\text{L'assertion est vraie.}}$$

6. Toute suite (u_n) qui vérifie l'assertion suivante tend vers $+\infty$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \; \forall A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \; (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A).$$

Supposons qu'il existe une suite vérifiant :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \; \forall A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \; (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A).$$

Nous avons donc pour un $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé : $\forall A \in \mathbb{R}, \; u_{n_0} \geqslant A$. Formulons la chose en français : u_0 est un nombre plus grand que tous les nombres réels. Ceci est impossible.

Il n'existe aucune suite vérifiant l'assertion proposée, l'assertion est toujours fausse.

Donc l'implication « si : $\exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A)$, alors (u_n) tend vers $+\infty$ » est vraie. L'hypothèse de l'implication étant fausse, quelle que soit la conclusion l'implication toute entière sera vraie. On peut alors tout affirmer, y compris que le niveau du capes de math reste inchangé.

Arithmétique.

7. On a $\dfrac{3}{11} = 0,272727272727$.

   En procédant à la division posée en potence :

$$
\begin{array}{rrr|l}
- & 3 & & 1\ 1 \\ \cline{4-4}
 & 0 & & 0,2\ 7 \\ \cline{2-2}
- & 3 & 0 & \\
 & 2 & 2 & \\ \cline{2-3}
 & - & 8\ 0 & \\
 & & 7\ 7 & \\ \cline{3-3}
 & & 3 &
\end{array}
$$

   donc $\frac{3}{11} = 0,272727\ldots$.

   L'affirmation est fausse.

8. Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

   Contre-exemple :$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

   L'assertion est fausse.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. La contraposée de l'assertion « n^2 pair $\Rightarrow n$ pair » est « n pair $\Rightarrow n^2$ pair ».

   Je vois mal quelle justification donner hormis un rappel de vocabulaire.
   L'assertion « n^2 pair $\Rightarrow n$ pair » est la réciproque de « n pair $\Rightarrow n^2$ pair ».
   La contraposée de l'assertion « n^2 pair $\Rightarrow n$ pair » est « n pas pair $\Rightarrow n^2$ pas pair ».

   L'affirmation est fausse.

10. Si la somme des chiffres en base 10 d'un entier naturel est divisible par 3 alors cet entier est divisible par 9.

    Contre-exemple : 3 est divisible par 3 mais pas par 9.

    L'assertion est fausse.

11. Soient a et b deux entiers naturels et n un entier naturel non nul.
    Si $2a \equiv 2b \pmod{n}$ alors $a \equiv b \pmod{n}$.

    Contre-exemple : $2 \times 6 \equiv 2 \times 12 \pmod{4}$ et pourtant $6 \not\equiv 12 \pmod{4}$.

    L'affirmation est fausse.

12. Soit n un entier naturel non nul, la somme des n premiers nombres impairs est égale au carré de $2n + 1$.

    Contre-exemple : $1 + 3 + 5 = 9$ et $(2 \times 3 + 1)^2 = 49$.

    L'assertion est fausse.

13. Soient a, b et c trois entiers tels que $a^2 = b^2 + c^2$.
    L'un au moins des nombres a, b et c est multiple de 5.

    Un entier est divisible par 5 s'il est congru à 0 ou 5 modulo 10.
    En considérant les carrés d'entiers de $[\![0, 10]\!]$ nous remarquons qu'il sont congrus à 0 ou 1 ou 4 ou 5 ou 6 ou 9 modulo 10.
    Représentons les sommes $b^2 + c^2$ modulo 10 par une table :

b^2 \ c^2	0	1	4	5	6	9
0	0	1	4	5	6	9
1	1	2	5	6	7	0
4	4	5	8	9	0	3
5	5	6	9	0	1	4
6	6	7	0	1	2	5
9	9	0	3	4	5	8

    Comme nous voulons un triplet pythagoricien il faut retirer ceux, en rouge dans le tableau, qui ne peuvent pas correspondre à des carrés parfaits.
    Enlevons tous les cas, en bleu ci-dessous, pour lesquels c ou b est divisible par 5.

b^2 \ c^2	0	1	4	5	6	9
0	0	1	4	5	6	9
1	1	2	5	6	7	0
4	4	5	8	9	0	3
5	5	6	9	0	1	4
6	6	7	0	1	2	5
9	9	0	3	4	5	8

Nous constatons que dans les cas restants a est nécessairement divisible par 5.

L'assertion est vraie.

Le raisonnement précédent est très élémentaire et peut être expliqué à un collégien en parlant de nombre dont le chiffre des unités est 0 ou 5 plutôt que de congruence.

Géométrie.

14. Un triangle dont les mesures des angles sont dans un ratio $1 : 2 : 3$ est un triangle rectangle.

    Si x est une mesure en degré du plus petit angle alors : $x + 2x + 3x = 180 \iff x = 30$. Ainsi $3x = 90$ et donc

    l'assertion est vraie.

15. Dans un plan affine euclidien, on considère un triangle ABC sur lequel sont construits extérieurement les triangles équilatéraux ABD et ACE.
    On a $BE = DC$.

    Un schéma met en évidence que ABE et ADC sont superposables. En effet par construction : $AD = AB$, $AE = AC$ et (en confondant les angles et leurs mesures) $\widehat{EAB} = \widehat{EAC} + \widehat{CAB} = 60 + \widehat{CAB} = \widehat{CAB} + 60 = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$.

    L'assertion est vraie.

    On peut aussi remarquer que les triangles sont isométriques via la rotation de centre A et d'angle $60°$. La précédente démonstration me semble encore plus élémentaire.

16. Dans un espace affine euclidien, muni d'un repère cartésien orthonormé, les droites D et D' de représentations paramétriques
$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+t \\ y & = & 3-t \\ z & = & 5-2t \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$ et $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+t \\ y & = & 3-t \\ z & = & -5t-1 \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$ sont coplanaires.

* Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.
Or $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, vecteurs directeurs respectivement de D et D', ne sont pas colinéaires donc D et D' ne sont pas parallèles.
* Si $M \in D \cap D'$ alors il existe $(t_M, s_M) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rl} 1+t_M &= 1+s_M \\ 3-t_M &= 3-s_M \\ 5-2t_M &= -5s_M-1 \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

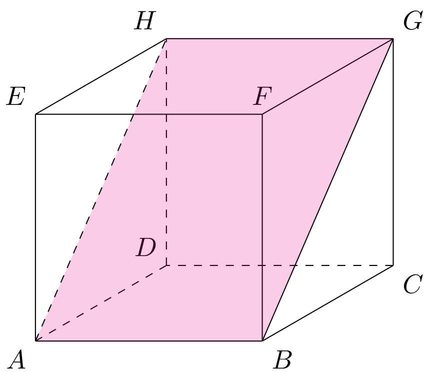
$$\left\{\begin{array}{rl} t_M &= s_M \\ t_M &= s_M \\ t_M &= \frac{5}{2}s_M+3 \end{array}\right.$$

Puisque $t_M = -2 = s_M$ est solution de ce système les droites sont sécantes.

$$\boxed{\text{L'affirmation est vraie.}}$$

La première partie concernant le non parallélisme est, *a posteriori*, inutile.

17. On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous.



On se place dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH})$.
Le point $K(9; -10; -8)$ est un point du plan (ABG).

Par lecture graphique $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BG}\right)$ est une base de la direction de (ABG) et $B \in (ABG)$.
$K \in (ABG)$ si et seulement si : $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{BK} = \alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{BG}$.

Or, dans le repère de l'énoncé, $B(1,1,0)$, $A(1,0,0)$ et $G(0,1,1)$ donc $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent : $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{BK} = \alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{BG}$, équivaut successivement à

$$\begin{cases} 8 = \alpha \times 0 + \beta \times (-1) \\ -11 = \alpha \times (-1) + \beta \times 0 \\ -8 = \alpha \times 0 + \beta \times 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 11 \\ \beta = -8 \end{cases}$$

Ainsi $\overrightarrow{BK} = 11\overrightarrow{BA} - 8\overrightarrow{BG}$.

L'affirmation est vraie.

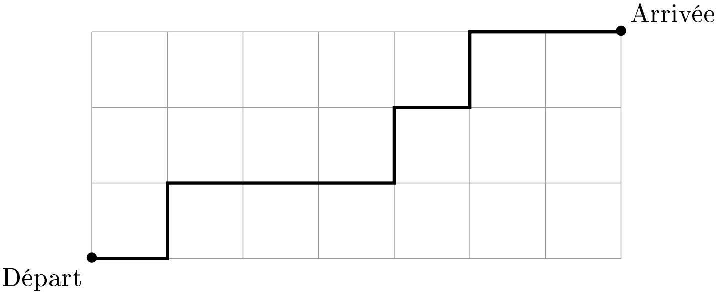
Dénombrement. Probabilités.

18. Soit E un ensemble fini non vide dont un des éléments est noté a.
Il y a autant de parties de E contenant a que de parties ne le contenant pas.

Si une partie Q de E contient a alors il existe une partie $P = Q \setminus \{a\}$ est l'unique partie de E ne contenant pas a telle que $Q = \{a\} \cup P$.
Autrement dit il y a une bijection entre l'ensemble des parties de E contenant a et celles ne contenant pas a.

L'assertion est vraie.

19. Le nombre de trajets les plus courts pour aller du départ à l'arrivée sur le quadrillage ci-dessous est égal à 120.



Un chemin court est formé 10 déplacements : 7 déplacements vers la droite et 3 vers le haut.

Cela revient à choisir une sous-ensemble de trois éléments de $[\![1;10]\!]$: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2} = 120$.

L'assertion est vraie.

20. Une agence reçoit en moyenne 8 appels téléphoniques par heure. On modélise le nombre d'appels reçus par heure par une loi de Poisson.

    La probabilité qu'il y ait plus de 3 appels téléphoniques au cours d'une heure est supérieure à $0,95$.

    Notons X la variable aléatoire réelle comptant le nombre d'appels téléphonique reçus pendant une heure. D'après l'énoncé $X \hookrightarrow \mathcal{P}(8)$.

    Dans ce cas, par convergence de la série exponentielle

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 3) &= \sum_{k=4}^{+\infty} \mathrm{e}^{-8}\frac{8^k}{k!}\\ &= 1 - \mathrm{e}^{-8}\sum_{k=0}^{3}\frac{8^k}{k!}\\ &\approx 0,9576\end{aligned}$$

L'assertion est vraie.

21. Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé. Les assertions suivantes sont équivalentes :

    — les évènements A et B sont indépendants ;

— les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Dire que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)\\
\mathbb{P}\left(\overline{A\cup B}\right) &= (1-\mathbb{P}(A))\,(1-\mathbb{P}(B))\\
1-\mathbb{P}(A\cup B) &= 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\
1-(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)) &= 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\
\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)
\end{aligned}$$

L'assertion est vraie.

22. On dépose au hasard n boules numérotées de 1 à n dans n urnes numérotées de 1 à n, en plaçant une boule par urne.
L'espérance du nombre de coïncidences (boule de même numéro que l'urne où elle se trouve) est égale à 1.

Algorithmique.

23. Le programme ci-dessous est écrit en langage Python.
En saisissant la commande *encadrement*$(0, 2, 0.001)$, on obtient un encadrement de longueur inférieure à 10^{-3} de la solution de l'équation $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+x^2-3=0$ dans l'intervalle $[0;2]$.

```python
from math import *
def f(x):
    return exp(0.5*x)+x**2-3
def encadrement(a,b,epsilon):
    m = (a + b)/2
    while b - a > epsilon:
        if f(a)*f(m) < 0 :
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

L'instruction $m=(a+b)/2$ n'étant pas dans la boucle *while* la valeur de m n'est pas modifiée et $b-a$ ne diminue pas. Il y aura une boucle infinie.

L'assertion est fausse.

Problème 2 : quelques modèles de dynamique d'une population.

Dans ce problème, on s'intéresse à différents modèles d'évolution d'une population.

Les trois parties sont indépendantes.

Le modèle logistique discret.

Dans cette partie, on modélise la taille de la population par une suite (u_n) où n est un entier naturel qui désigne le temps écoulé depuis un instant donné pris pour origine.

On suppose que la taille de la population est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant M.$$

Dans toute cette partie, on suppose $0 < u_0 < M$, et on pose $v_n = \dfrac{u_n}{M}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On a alors $v_0 \in]0,1[$.

On suppose qu'il existe un réel a tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = av_n(1-v_n) \qquad (1).$$

Le but de cette partie est d'étudier le comportement de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $0 < a \leqslant 1$ et de faire une étude numérique pour le cas $a = \dfrac{5}{2}$.

Le cas $0 < a \leqslant 1$.

On rappelle que $v_0 \in]0,1[$.

On considère les fonctions f_a et g_a définies sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1],\ f_a(x) = ax(1-x) \text{ et } g_a(x) = f_a(x) - x.$$

1. Dresser le tableau des variations de la fonction f_a sur l'intervalle $[0,1]$.

   f_a est polynomiale donc dérivable sur $[0,1]$ et : $\forall x \in [0,1],\ f_a'(x) = a(1-2x)$.
   Comme : $a(1-2x) > 0 \iff x < \frac{1}{2}$, puisque $a > 0$, et $a(1-2x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f'_a		$+$	0	$-$	
f_a	0	$\nearrow$	$\frac{a}{4}$	$\searrow$	0

2. Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0,1]$.

$v_0 \in]0,1[$, or, d'après la question précédente $f_a(]0,1[) \subset \left[0, \frac{a}{4}\right]$ avec $a \leqslant 1$ donc $v_1 = f_a(v_0) \in [0,1]$.
En itérant (récurrence évidente) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [0,1].}$$

3. Démontrer que si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0,1]$, alors ℓ est un point fixe de f_a, c'est-à-dire que $f_a(\ell) = \ell$.

f_a est polynomiale donc continue sur $[0,1]$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc, par composition : $f_a(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.
De plus $v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $f_a(v_n) = v_{n+1}$ donc, par unicité de la limite, $f_a(\ell) = \ell$.

$$\boxed{\text{Si } v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \text{ alors } f_a(\ell) = \ell.}$$

4. Démontrer que f_a admet 0 pour unique point fixe dans l'intervalle $[0,1]$.

Raisonnons par disjonction des cas.

* $f_a(0) = 0$.
* Soit $x \in]0;1]$.

$$\begin{aligned} f_a(x) = x &\iff ax(1-x) = x \\ &\iff a(1-x) = 1 \end{aligned}$$

- Si $a = 1$ alors

$$f_a(x) = x \iff x = 0$$

ce qui contredit $x \in]0;1]$.

- Si $a \in]0;1[$ alors

$$f_a(x) = x \Longleftrightarrow x = \frac{a-1}{a}$$

Or $\frac{a-1}{a} < 0$ contredit le fait que $x \in]0;1]$ et donc $f_a(x) \neq x$.

Ainsi

$$\boxed{\text{le seul point fixe de } f_a \text{ sur } [0;1] \text{ est } 0.}$$

5. Démonter que $g_a(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]0,1[$. On pourra utiliser que $1 - \frac{1}{a} \leqslant 0$.

Soit $x \in]0;1[$.

$$1 - \frac{1}{a} \leqslant\leqslant 0 \leqslant x$$

Nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned}
\frac{a-1}{a} &\leqslant x \\
a - 1 &\leqslant ax \text{ car } a > 0 \\
a - ax - 1 &\leqslant 0 \\
a(1-x) - 1 &\leqslant 0
\end{aligned}$$

et puisque $x > 0$

$$ax(1-x) - x \leqslant 0$$

Autrement dit

$$\boxed{\forall x \in]0;1[,\ g_a(x) \leqslant 0.}$$

6. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$g_a(v_n) \leqslant 0 \Longleftrightarrow f_a(v_n) \leqslant v_n \Longleftrightarrow v_{n+1} \leqslant v_n$.

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

7. Justifier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel que l'on déterminera.

   D'après la question 2 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et d'après la question précédente elle est décroissante donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   D'après la question 3 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe. Or, d'après la question 4, 0 est l'unique point fixe dans $[0;1]$ de f_a et donc

   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

8. Que prédit le modèle sur l'évolution de la taille de la population dans ce cas ?

   La taille de la population se rapproche de 0.

Le cas $a = \frac{5}{2}$.

On pose $v_0 = \frac{1}{2}$. On introduit les fonctions f, g et h définies pour $x \in [0,1]$, par

$$f(x) = \frac{5}{2}x(1-x),\ \ g(x) = f(x) - x \text{ et } h(x) = f \circ f(x) - x.$$

9. Démontrer que f admet sur $[0,1]$ exactement deux points fixes.

   Soit $x \in [0;1]$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{5}{2}x(1-x) = x \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \frac{5}{2}(1-x) = 1 \\ &\iff x = \ \text{ ou } x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

   Or $\left(0, \frac{3}{5}\right) \in ([0;1])^2$ donc

   f admet exactement deux points fixes dans $[0;1]$.

10. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4. On donnera les valeurs décimales à 10^{-3} près.

    $v_1 = 0,625$, $v_2 \approx 0,586$, $v_3 \approx 0,607$ et $v_4 \approx 0,597$.

11. Écrire un algorithme qui permet de calculer les 10 premiers termes de la suite (v_n). En déduire v_{10}.

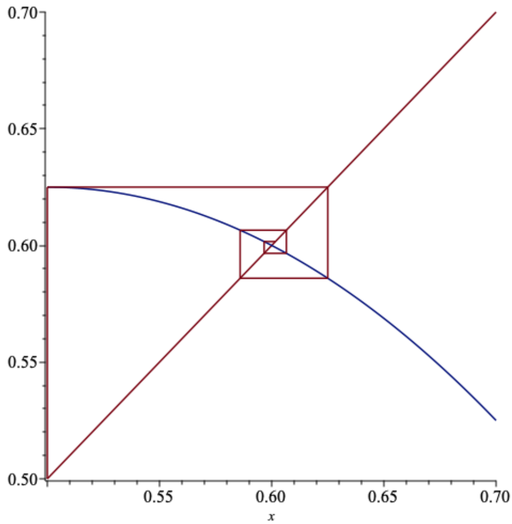
```
def fonction(a,v,n):
  L=[v]
  for k in range(1,n+1):
    L=L+[a*L[k-1]*(1-L[k-1])]
  return L
```

Puis on lance l'instruction $fonction(5/2, 1/2, 10)$.

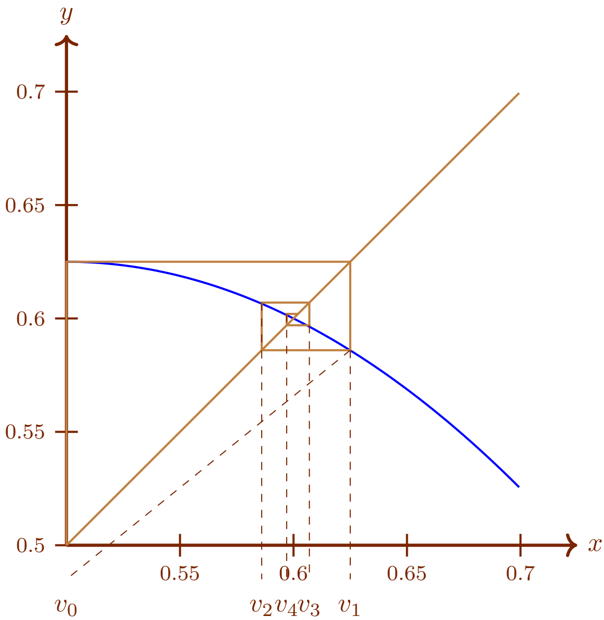
$$v_{10} \approx 0,59994785899.$$

12. Dans un repère orthonormé on a représenté, sur le graphique ci-dessous, pour des abscisses comprises entre $0,5$ et $0,7$:

- la courbe représentative de la fonction f,
- la droite d'équation $y = x$.



Reproduire le graphique en mettant en évidence les nombres v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4.



13. Vérifier que l'on a

$$\forall x \in [0, 1],\ h(x) = -\frac{x(5x-3)(25x^2-35x+14)}{8}.$$

Soit $x \in [0; 1]$.
D'une part

$$\begin{aligned}
h(x) &= f \circ f(x) - x \\
&= \frac{5}{2} f(x)\,(1 - f(x)) - x \\
&= \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} x(1-x) \left(1 - \frac{5}{2} x(1-x)\right) - x \\
&= \frac{25}{4}(x - x^2) \left(1 - \frac{5}{2} x + \frac{5}{2} x^2\right) - x \\
&= \frac{25}{4} \left(x - \frac{5}{2} x^2 + \frac{5}{2} x^3 - x^2 + \frac{5}{2} x^3 - \frac{5}{2} x^4\right) - x \\
&= -\frac{125}{8} x^4 + \frac{125}{4} x^3 - \frac{175}{8} x^2 + \frac{21}{4} x
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
&-\frac{x(5x-3)(25x^2-35x+14)}{8}\\
&=-\frac{1}{8}\left(5x^2-3x\right)(25x^2-35x+14)\\
&=-\frac{1}{8}\left(125x^4-175x^3+70x^2-75x^3+105x^2-42x\right)\\
&=-\frac{1}{8}\left(125x^4-225x^3+175x^2-42x\right)\\
&=-\frac{125}{8}x^4+\frac{125}{4}x^3-\frac{175}{8}x^2+\frac{21}{4}x
\end{aligned}$$

donc, par unicité de la forme développée, réduite et ordonnée d'un polynôme :

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ h(x) = -\frac{x(5x-3)(25x^2-35x+14)}{8}.}$$

14. En déduire que les fonctions f et $f \circ f$ ont les mêmes points fixes sur $[0,1]$.

Par construction les points fixes de $f \circ f$ sont les zéros de h.
Le discriminant de $25X^2 - 35X + 14$ est $(-35)^2 - 4 \times 25 \times 14 = -175 < 0$ donc ce polynôme n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$.
Ainsi les zéros de h sont 0 et $\frac{3}{5}$.

$$\boxed{\text{Les points fixes de } f \circ f \text{ dans } [0;1] \text{ sont } 0 \text{ et } \tfrac{3}{5}.}$$

15. Étudier le signe de la fonction h sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{3}{5}\right]$.

D'après la réponse apportée à la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R},\ 25x^2 - 35x + 14 > 0$.
De plus :

$$\forall x \in \left]0, \frac{3}{5}\right[,\ \left\{\begin{array}{l} -\frac{x}{8} < 0 \\ 5x - 3 < 0 \end{array}\right.$$

donc

$$\boxed{h(0) = h\left(\tfrac{3}{5}\right) = 0 \text{ et : } \forall x \in \left[0, \tfrac{3}{5}\right],\ h(x) > 0.}$$

16. On admet que l'intervalle $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ est stable par la fonction $f \circ f$. Déduire de la question précédente que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ est stable par $f \circ f$, $v_0 \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{2n+2} = f \circ f(v_{2n}),$$

donc, en raisonnant par récurrence, nous démontrerions :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{2n} \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right].$$

Enfin, h étant strictement positive sur $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ h(v_{2n}) \geqslant 0$$

ce qui équivaut, par construction de h et $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ à

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{2n+2} - v_{2n} \geqslant 0.$$

Autrement dit

$$\boxed{(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

17. Démontrer que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{3}{5}$.

Les questions précédentes ont établi que $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc convergente. De plus sa limite ne peut être q'un point fixe de $f \circ f$ dans $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$. Autrement dit

$$\boxed{v_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{5}.}$$

18. En déduire que la suite $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers $\dfrac{3}{5}$, puis que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{3}{5}$.

f est continue sur $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ et $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{5}$ donc, par composition,

$$f(v_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f\left(\frac{3}{5}\right).$$

Or $f(v_{2n}) = v_{2n+1}$ et $f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$ donc

$$v_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{5}.$$

Puisque les suites extraites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{3}{5}.$$

19. Conclure sur le comportement asymptotique de la taille de la population prédit par le modèle.

D'après la question précédente $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{5}M$ donc

la taille de la population se rapproche de 60 % du majorant M.

Le modèle logistique continue.

Dans cette partie, on modélise l'évolution de la population par une fonction. La taille de la population à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ est représentée par le réel $y(t)$ où y désigne une fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.

On suppose que la taille de la population est bornée par un réel strictement positif M, c'est-à-dire que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 < y(t) < M.$$

On suppose qu'il existe un réel strictement positif a tel que y soit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y'(t) = ay(t)\left(M - y(t)\right) \qquad (2).$$

20. (a) Démontrer qu'il existe des réels α, β que l'on déterminera tels que pour tout réel z vérifiant $0 < z < M$,

$$\frac{1}{z(M-z)} = \alpha\frac{1}{z} + \beta\frac{1}{M-z}.$$

En déduire que y vérifie l'équation :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \alpha\frac{y'(t)}{y(t)} + \beta\frac{y'(t)}{M-y(t)} - a = 0.$$

Raisonnons par analyse-synthèse.

* Supposons l'égalité proposée vraie pour tout $z \in]0, M[$.
  Soit $z \in]0, M[$.

$$\frac{1}{z(M-z)} = \alpha\frac{1}{z} + \beta\frac{1}{M-z}$$

  équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(M-z)} &= \frac{\alpha M - \alpha z + \beta z}{z(M-z)}\\ 1 &= (\beta-\alpha)z + \alpha M\end{aligned}$$

  Par unicité de l'écriture développée, réduite et ordonnée d'un polynôme :

$$\begin{cases}\beta-\alpha = 0\\ \alpha = \frac{1}{M}\end{cases}$$

* Réciproquement, si $\alpha = \beta = \frac{1}{M}$ l'égalité est clairement vérifiée.

$$\boxed{\forall z \in]0, M[,\ \frac{1}{z(M-z)} = \frac{1}{Mz} + \frac{1}{M^2-Mz}.}$$

$y > 0$ donc l'équation (2) peut s'écrire $\frac{y'(t)}{y(t)(M-y(t))} - a = 0$.
En utilisant le précédent résultat avec $z = y(t)$ on obtient

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{1}{M}\times\frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{y'(t)}{M}\times\frac{1}{M-y(t)} - a = 0.}$$

(b) Déterminez en fonction de a et de M, une primitive de la fonction

$$\psi : t \mapsto \alpha\frac{y'(t)}{y(t)} + \beta\frac{y'(t)}{M-y(t)} - a \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

Puisque $0 < y < M$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\boxed{\Psi : t \mapsto \alpha \ln \circ y(t) - \beta \ln[M-y(t)] - at \text{ est une primitive de } \psi \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

21. Déduire de la question précédente qu'il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$y(t) = \frac{cM\mathrm{e}^{aMt}}{1 + c\mathrm{e}^{aMt}}.$$

$\psi \neq 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Psi = \lambda$.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$.
D'après la question précédente :
$$\lambda = \frac{1}{M}\ln\left(\frac{y(t)}{M - y(t)}\right) - at$$

Ce qui équivaut successivement à
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{M\lambda + Mat} &= \frac{y(t)}{M - y(t)} \\ \mathrm{e}^{M\lambda}\mathrm{e}^{Mat}\left(M - y(t)\right) &= y(t) \\ M\mathrm{e}^{M\lambda}\mathrm{e}^{Mat} &= \left(1 + \mathrm{e}^{M\lambda}\mathrm{e}^{Mat}\right)y(t) \end{aligned}$$

en notant $c = \mathrm{e}^{M\lambda}$, qui est bien strictement positif,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y(t) = \tfrac{Mc\mathrm{e}^{aMt}}{1+c\mathrm{e}^{aMt}}.}$$

22. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$.
En factorisant puis en simplifiant
$$y(t) = \frac{M}{\mathrm{e}^{-aMt} + 1}$$

Or, comme $aM > 0$,
$$\mathrm{e}^{-aMt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc

$$\boxed{y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} M.}$$

23. Qu'en déduire sur l'évolution de la population prédite par le modèle ?

> La taille de la population va atteindre le majorant M.

Un modèle proies-prédateurs discret.

On s'intéresse dans cette partie à l'évolution de deux populations dans le même milieu : une population de proies, et une population de prédateurs.

En préliminaire, on étudie les suites (x_n) et (y_n) définies par les relations de récurrence suivantes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n - \alpha y_n \\ y_{n+1} & = & y_n + \alpha x_n \end{array} \right.$$

où α est un réel strictement positif et indépendant de n.

24. On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ à l'aide de $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et de A.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.}$$

(b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Par une récurrence immédiate (en multipliant à gauche par A.)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.}$$

25. (a) Démontrer que A admet deux valeurs propres complexes, notées λ et μ, que l'on précisera.

Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(A - XI_2) \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & -\alpha \\ \alpha & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)^2 + \alpha^2 \\ &= (1-X)^2 - (i\alpha)^2 \\ &= (1-X-i\alpha)(1-X+i\alpha) \end{aligned}$$

α étant non nul,

$\lambda = 1 + i\alpha$ et $\mu = 1 - i\alpha$ sont les valeurs propres complexes de A.

(b) Justifier l'existence de $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $\lambda = r\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mu = r\mathrm{e}^{-i\theta}$, et donner l'expression de r en fonction de α.

26. Justifier l'existence d'une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que

$$A = P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}.$$

$\chi_A(X)$ est scindé simple dans $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et comme ses valeurs propres sont λ et μ

$$\exists P \in \mathcal{G}l_2(\mathbb{C}),\ A = P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}.$$

27. Démontrer que $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$ et déterminez P^{-1}.

En tâtonnant ou avec les formules de Cramer ou avec l'algorithme de Gauss-Jordan on peut déterminer la matrice inverse.

Notons $C = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}$.

On vérifie : $CB = I_2$ donc C est inversible et $C^{-1} = B$.

De plus, en effectuant les produits,

$$\begin{aligned} C\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}C^{-1} &= \begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ -i\lambda & i\mu\end{pmatrix}C^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda+\mu & i\lambda - i\mu\\ -i\lambda + i\mu & \lambda+\mu\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\ &= A \end{aligned}$$

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}.$$

28. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1}$.

Là encore par une récurrence on démontre le résultat. L'initialisation repose sur des conventions de notation pour les puissances et l'hérédité sur :

$$\begin{aligned}
A^2 &= A \times A \\
&= P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} P^{-1}
\end{aligned}$$

29. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_n = r^n \left(\cos(n\theta)x_0 - \sin(n\theta)y_0\right), \\ y_n = r^n \left(\sin(n\theta)x_0 + \cos(n\theta)y_0\right). \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
A^n &= P\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \frac{1}{2} P \begin{pmatrix} \left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(r\mathrm{e}^{-i\theta}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} P \begin{pmatrix} r^n \mathrm{e}^{in\theta} & 0 \\ 0 & r^n \mathrm{e}^{-in\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^n \mathrm{e}^{in\theta} & i r^n \mathrm{e}^{in\theta} \\ r^n \mathrm{e}^{-in\theta} & -i r^n \mathrm{e}^{-in\theta} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r^n \left(\mathrm{e}^{in\theta} + \mathrm{e}^{-in\theta}\right) & r^n i \left(\mathrm{e}^{in\theta} - \mathrm{e}^{-in\theta}\right) \\ -r^n i \left(\mathrm{e}^{in\theta} - \mathrm{e}^{in\theta}\right) & r^n \left(\mathrm{e}^{in\theta} + \mathrm{e}^{-in\theta}\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r^n 2\cos(n\theta) & -r^n 2\sin(n\theta) \\ r^n 2\sin(n\theta) & r^n 2\cos(n\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r^n \cos(n\theta) & -r^n \sin(n\theta) \\ r^n \sin(n\theta) & r^n \cos(n\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^n \cos(n\theta) & -r^n \sin(n\theta) \\ r^n \sin(n\theta) & r^n \cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^n \left(\cos(n\theta) x_0 - \sin(n\theta) y_0\right) \\ r^n \left(\sin(\theta) x_0 + r^n \cos(n\theta) y_0\right) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} x_n = r^n \left(\cos(n\theta) x_0 - \sin(n\theta) y_0\right), \\ y_n = r^n \left(\sin(n\theta) x_0 + \cos(n\theta) y_0\right). \end{cases} .}$$

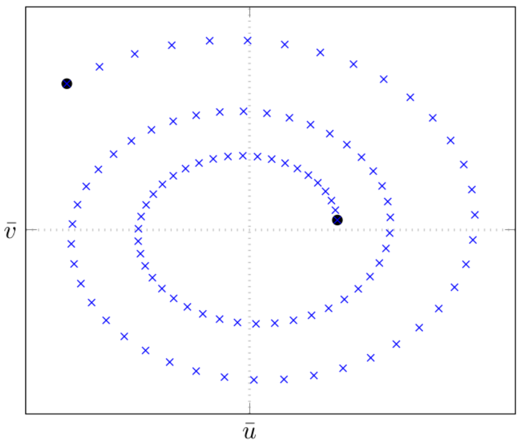
30. On propose dans la suite un modèle discret pour suivre l'évolution des populations de proies et de prédateurs.

L'entier n désigne le temps écoulé depuis un instant donné pris pour origine. Les tailles des populations de proies et de prédateurs sont respectivement données par les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_n = \overline{u} + x_n, \\ v_n = \overline{v} + y_n, \end{cases}$$

où les réels strictement positifs $\overline{u}$ et $\overline{v}$ sont fixés et correspondent à des tailles de référence pour les populations de proies et de prédateurs.

On a tracé sur le graphique ci-dessous les points de coordonnées (u_n, v_n) pour les premières valeurs de n comprises entre 0 et un entier N strictement positif.



Faire une description qualitative de l'évolution des populations de proies et de prédateurs prédite par le modèle.

31. On suppose que x_0 et y_0 ne sont pas tous les deux nuls. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $x_n^2 + y_n^2$, en fonction de r, x_0, y_0 et en déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peuvent pas être toutes les deux bornées. Discuter de la pertinence du modèle.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$x_n^2 + _n^2 = r^{2n}\left[\cos^2(n\theta)x_0^2 + \sin^2(n\theta)y_0^2 + \sin^2(n\theta)x_0^2 + \cos^2(n\theta)y_0^2\right]$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n^2 + y_n^2 = r^{2n}(x_0^2 + y_0^2).}$$