Capes de mathématique de Mayotte 2023 épreuve 2.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Durée : 5 heures.

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions relevant de la circulaire du 17 juin 2021 BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème 1 : vrai ou faux.

Précisez si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'aire des mers et océans sur la Terre est d'environ 362 millions de km^2, pour une aire totale d'environ 510 millions de km^2. L'Océan Pacifique représente 46 % de la surface totale des mers et océans.

   Proposition : l'Océan Pacifique représente plus d'un tiers de la surface de la Terre.

2. Le code d'accès à un immeuble est un nombre de cinq chiffres.
   Ce code comporte un « 1 », un « 2 », un « 7 » et deux fois le chiffre « 8 ».

   Proposition : on peut composer 60 codes différents avec ces chiffres.

3. A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0,2$, $P_A(B) = 0,3$ et $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,56$.

   Proposition : les événements A et B sont indépendants.

4. On considère un jeu pour lequel la probabilité de gagner est égale à $0,03$.
   Une personne décide d'y jouer n fois, chaque jeu étant indépendant des autres.

   Proposition : la probabilité que cette personne gagne au moins une fois au cours de ces n parties est supérieure à $0,5$ si et seulement si $n \geqslant 23$.

5. Un jeu consiste à lancer 20 fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancé on gagne 6 € si le nombre 1 apparaît. La mise est de 15 €.

   Proposition : on peut espérer un gain de 5 €.

6. Proposition : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$.
7. Proposition : l'équation $\cos 3x = \sin x$ admet six solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.
8. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ telle que $f'(x) = 0$, pour tout réel x non nul.

   Proposition : il existe une constante réelle k telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = k$.
9. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x}$.

   Proposition : la limite de f en 0 est $+\infty$.
10. Soit P un polynôme de degré 3, à coefficients réels, et défini sur $\mathbb{C}$.
    Soit z une racine de P et soit $\overline{z}$ son conjugué.

    Proposition : $\overline{z}$ est également une racine du polynôme P.
11. Soit (J_k) la suite définie par $J_k = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^{k-1}}^{\mathrm{e}^k} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$.

    Proposition : pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 1, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} J_k = \frac{n^2}{2}$.
12. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
    A est le point de coordonnées $(0; 1)$.
    (E) est l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant l'égalité :
    $$\left|\left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i\right| = 2.$$
    Proposition : (E) est le cercle de centre A et de rayon 1.
13. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $K_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

    Proposition : pour tout entier naturel n non nul, $(n+1)K_n - K_{n+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
14. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```python
def surprise(n):
    k=0
    u=1
    while k<n:
        k=k+1
        u=u*2
    return u
```

Proposition : surprise(4) renvoie la valeur 16.

15. Proposition : pour tout entier naturel n, le nombre $n^3 - n$ est divisible par 6.

16. Proposition : $3^{2023} + 6$ est divisible par 11.

17. Proposition : pour tout entier relatif k, $(7k + 3)$ et $(2k + 1)$ sont premiers entre eux.

18. Proposition : il existe des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation $51x + 39y = 1$.

19. On pose $A = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$.

    Proposition : A est un nombre rationnel.

20. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour tout entier naturel n.

    Proposition : tous les termes de la suite (u_n) sont des carrés parfaits.

Problème 2 : suites.

On considère :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$;
- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$;
- la suite (S_n) définie, pour tout entier naturel n, par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Partie A : étude de la fonction f.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Étudier les variations de la fonction f.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

Partie B : étude de la suite (u_n).

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminez sa limite.

Partie C : étude de la suite (S_n).

1. Déterminer le sens de variation de (S_n).

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Problème 3 : équation différentielle.

Soit m un nombre réel.
On considère l'équation différentielle $(E_m) : \; y'' - m^2 y = 0$.
Soit h une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (P_m) :

$$\text{pour tout réel } x, \; h''(x) + 2mh'(x) = 0.$$

1. Déterminer, en fonction de m, l'expression de la fonction h', puis celle de h.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = h(x)\mathrm{e}^{mx}$.
   Démontrer que f est une solution de (E_m) si et seulement si h vérifie la propriété (P_m).

3. Résoudre l'équation différentielle (E_m).

4. Le mouvement rectiligne du centre de gravité d'un solide est repéré sur un axe gradué d'origine O. On note x la fonction donnant son abscisse en fonction du temps t.
   À l'instant $t = 0$, le solide est au point d'abscisse 4 et sa vitesse est nulle.
   x est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_{0,5}) : \; y'' - 0,25y = 0$.
   Déterminer l'expression de la fonction x.

Problème 4 : distance entre deux droites de l'espace.

L'espace est muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
P est le plan d'équation : $2x + 5y - z + 20 = 0$.
P' est le plan d'équation : $-2x + y + z - 8 = 0$.

Partie A : intersection de deux plans.

1. Justifier que les plans P et P' sont sécants.

On notera D la droite d'intersection des plans P et P'.

2. Vérifier que le point $A(-4;-2;2)$ appartient à la droite D puis déterminer un vecteur directeur de cette droite.

3. Justifier que la droite D a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -4+t \\ y = -2 \\ z = 2+2t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

Partie B : position relative de deux droites.

Δ est la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2+t \\ z = t \end{cases}, \text{ ou } t \in \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les droites D et Δ ne sont pas parallèles.

2. Justifier que les droites D et Δ ne sont pas sécantes.

3. Que peut-on en déduire quant aux droites D et Δ ?

Partie C : distance entre deux droites.

Soit $I(x_1, y_1, z_1)$ un point de la droite D et $J(x_2, y_2, z_2)$ un point de la droite Δ.

1. Pour quelles valeurs des triplets (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) la droite (IJ) est-elle à la fois perpendiculaire à D et à Δ ?

2. En déduire la valeur exacte de la distance entre les droites D et Δ.