Capes de mathématique de Mayotte 2023 épreuve 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Problème 1 : vrai ou faux.

1. $\frac{46}{100} \times \frac{362}{510} \approx 0,3265 < 0,333\dots$.

   La proposition est fausse.

2. * Le nombre de positions possibles pour les deux chiffres 8 est $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10$.
   * Une fois placer les chiffres 8 il reste 3 emplacements à remplir avec 3 chiffres distincts donc il s'agit de permuter ces trois chiffres. Il y a $3! = 6$ possibilités.
   * D'après le principe multiplicatif le nombre total de possibilités est 10×6.

   La proposition est vraie.

3. Déterminons si les événements sont indépendants.

   * Calculons $\mathbb{P}(A \cap B)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)\\ &= 0,2 \times 0,3\\ &= 0,06\end{aligned}$$

   * Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\\ &= \left(1 - \mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right)\right) + 0,06 - 0,2\\ &= \left(1 - \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)\right) - 0,14\\ &= 1 - 0,56 - 0,14\\ &= 0,3\end{aligned}$$

* Déterminons l'indépendance de A et B.
  D'une part $\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B) = 0,2\times 0,3 = 0,06$ et d'autre part $\mathbb{P}(A\cap B) = 0,06$ donc $\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B)$.
  Ainsi A et B sont indépendants.

La proposition est vraie.

4. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées parmi les 23.

   Déterminons n tel que que$\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0,5$.

   $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;0,03)$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) &= 1-\mathbb{P}(X=0)\\ &= 1-\binom{n}{0}0,03^0\times(1-0,03)^n\\ &= 1-0,97^n\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0,5 &\iff 1-0,97^n \geqslant 0,5\\ &\iff 0,97^n \leqslant 0,5\end{aligned}$$

Puisque ln est croissante :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0,5 &\iff \ln(0,97^n) \leqslant \ln(0,5)\\ &\iff n\ln(0,97) \leqslant \ln(0,5)\end{aligned}$$

Puisque $\ln(0,97) < 0$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0,5 \iff n \geqslant \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,97)}$$

Or, en tronquant à 10^{-3}, $\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,97)} \approx 22,756$ donc pour que $\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0,5$ il faut que $n \geqslant 23$.

La proposition est vraie.

5. Soient X la variable aléatoire comptant le nombre de fois que le chiffre 1 est obtenu parmi les 20 lancers et $Y = 6X - 15$ la variable aléatoire comptant les gains algébriques alors réalisés.

   Calculons $\mathbb{E}(Y)$.

   Pa linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = 6\mathbb{E}(X) - 15$$

   Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(20; \frac{1}{6}\right)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 6 \times 20 \times \frac{1}{6} - 15 \\ &= 5\end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{La proposition est vraie.}}$$

6.
7. Calculons $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}\end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{La proposition est vraie.}}$$

8. Trouvons un contre exemple.

   Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

La proposition est fausse.

9. Étudions le comportement asymptotique de f en 0.

$\frac{\sin(2x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x}{x}$.
D'où : $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$.

La proposition est fausse.

10. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P(X) = aX^2 + bX + c$ et $z \in \mathbb{C}$une racine de P.

$$P\left(\overline{z}\right) = a\overline{z}^2 + b\overline{z} + c$$

Or la conjugaison est un automorphisme d'algèbre sur $\mathbb{C}$ donc :

$$\begin{aligned} P\left(\overline{z}\right) &= \overline{az^2 + bz + c} \\ &= \overline{P(z)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi si $P(z) = 0$ alors $P\left(\overline{z}\right) = 0$.

La proposition est vraie.

11. Calculons la somme.

$$\sum_{k=1}^{n} J_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathrm{e}^{k-1}}^{\mathrm{e}^{k}} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} J_k &= \int_1^{e^n} \frac{\ln(t)}{t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{e^n} 2\frac{\ln(t)}{t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[(\ln(t))^2\right]_1^{e^n} \\ &= \frac{n^2}{2}\end{aligned}$$

La proposition est vraie.

12. Déterminons (E).

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i\right| &= \left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z-i\left(1-i\sqrt{3}\right)\right| \\ &= \left|1-i\sqrt{3}\right| \times |z-i| \\ &= 2\,|z-i|\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i\right| = 2 \Leftrightarrow |z-i| = 1.$$

La proposition est vraie.

13. Établissons une relation de récurrence pour la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.
$x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{n+1}(\ln(x))^{n+1}$ sont des fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}K_n &= \left[\frac{1}{x} \times \frac{1}{n+1}(\ln(x))^{n+1}\right]_1^{e} - \int_1^{e} \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{n+1}(\ln(x))^{n+1}\,dx \\ &= \frac{1}{e(n+1)} + \frac{1}{n+1}K_{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi : $(n+1)K_n = \frac{1}{e} + K_{n+1}$.

La proposition est vraie.

14. Interprétons la fonction Python.

    La fonction calcule le terme de rang $n \in \mathbb{N}$ d'un suite géométrique de raison 2 et de terme initial $u_0 = 1$.
    Donc $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = 2^k$.
    En particulier $u_4 = 2^4 = 16$.

    La proposition est vraie.

15. Divisibilité.

    Soit $n \in \mathbb{N}$.
    $n^3 - n^= n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$.
    $n^3 - n$ est le produit de trois entiers consécutifs donc, nécessairement il est pair et divisible par 3.
    Et par conséquent $n^3 - n$ est divisible par 6.

    La proposition est vraie.

16. Démontrons que la nombre n'est pas divisible par 11.

    Puisque les groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$ est d'ordre 10 : $3^{2023} \equiv 2^3 \mod [11] \equiv 8 \mod [11]$.
    Donc $3^{2023} + 6 \equiv 8 + 6 \mod [11] \equiv 3 \mod [11]$.
    $3^{2023} + 6$ n'est pas congru à 0 modulo 11.

    La proposition est fausse.

17.

18. $51x + 39y = 3(17x + 13y)$ or 3 ne divise pas 1 donc il n'existe pas de couple d'entier solution de l'équation.

    La proposition est fausse.

19. Raisonnons par l'absurde.

Supposons que A est rationnel.
Autrement dit il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $A = \frac{a}{b}$ car $A > 0$.
Or

$$\begin{aligned} A = \frac{a}{b} &\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{a}{b} \\ &\Leftrightarrow b\ln(2) = a\ln(3) \end{aligned}$$

Puisque exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} A = \frac{a}{b} &\Leftrightarrow \exp\left(b\ln(2)\right) = \exp\left(a\ln(3)\right) \\ &\Leftrightarrow 2^b = 3^a \end{aligned}$$

Ce qui est impossible puisque les nombres n'ont aucun facteurs commun.

La proposition est fausse.

20. Soit $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = (n+1)^1$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* $u_0 = 1 = (0+1)^2$ donc $\mathscr{P}(0)$ st vraie.
* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie.
  Or

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On a démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)^2$.

La proposition est vraie.

Problème 2 : suites.

Partie A : étude de la fonction f.

1. Sans difficulté, avec les règles opératoires sur les limites :

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Par croissance comparée :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Étudions les variations de f.

f est un produit d'applications dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} \\ &= (1-x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

D'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

3. Résolvons l'équation.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x\mathrm{e}^{-x} = x \\ &\iff x(\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0 \\ &\leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{-x} = 1 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } -x = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = x$ est $\{0\}$.

Partie B : étude de la suite (u_n).

1. Démontrons par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n.

   * $u_0 = 1 > 0$.
   * Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n > 0$.
     f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après la question précédente donc : $f(u_n) > 0$, *i.e.* $u_{n+1} > 0$.

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.$$

2. Démontrons par une récurrence forte que $u_n > u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   * $u_1 = \mathrm{e}^{-1} < 1 = u_0$.
   * Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $i \in [\![0, k]\!]$ $u_i > u_{i+1}$.
     Ainsi, et en tenant compte de la question précédente, $1 > u_k > u_{k+1} > 0$.
     Puisque f est strictement croissante sur $[0, 1]$: $f(u_k) > f(u_{k+1})$. Autrement dit $u_{n+1} > u_{n+2}$.

   On a démontré : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.

   (u_n) est strictement décroissante.

3. Concluons quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) D'après ce qui précède $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc convergente. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.

   (b) Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ nécessairement $f(\ell) = \ell$.
   Donc, d'après la question A.3., $\ell = 0$.

   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Partie C : étude de la suite (S_n).

1. Monotonie de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. $S_{n+1} - S_n = u_n > 0$.

   $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}$.

* $u_1 = \mathrm{e}^{-1}$ et $\mathrm{e}^{-\sum_{k=0}^{0} u_k} = \mathrm{e}^{-1}$ donc $u_1 = \mathrm{e}^{-S_0}$.
* Soit $i \in \mathbb{N}$.
  Supposons $u_{i+1} = \mathrm{e}^{-S_i}$.

$$u_{i+2} = u_{i+1}\mathrm{e}^{-u_{i+1}}$$

  D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{i+2} &= \mathrm{e}^{-S_i}\mathrm{e}^{-u_{i+1}} \\ &= \mathrm{e}^{-u_{i+1}-S_i} \\ &= \mathrm{e}^{-S_{i+1}} \end{aligned}$$

On a démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}.}$$

3. Étudions la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ et $\ln(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\infty$ donc en composant : $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = \ln\left(\mathrm{e}^{-S_n}\right) = -S_n$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.}$$

Problème 3 : équation différentielle.

1. Déterminons h.

h' est solution de l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 1 : $y' + 2my = 0$.
Donc : $\exists \mu \in \mathbb{R},\ h' : x \mapsto \mu\mathrm{e}^{-2mx}$.
Enfin :

$$\boxed{\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ h : x \mapsto \alpha\mathrm{e}^{-2mx} + \beta.}$$

2. Démontrons l'équivalence.

$$\begin{aligned}
& f'' - m^2 f = 0 \\
& \iff h''(x)\mathrm{e}^{mx} + mh'(x)\mathrm{e}^{mx} + mh'(x)\mathrm{e}^{mx} + m^2 h(x)\mathrm{e}^{mx} - m^2 h(x)\mathrm{e}^{mx} = 0 \\
& \iff h''(x)\mathrm{e}^{mx} + 2mh'(x)\mathrm{e}^{mx} = 0 \\
& \iff \left(h''(x) + mh'(x)\right)\mathrm{e}^{mx} = 0 \\
& \iff h''(x) + mh'(x) = 0
\end{aligned}$$

f est solution de (E_m) si et seulement si h est solution de (P_m).

3. Résolvons (E_m).

   D'après la question précédente l'ensemble des solutions est formé des fonctions définies par

$$\begin{aligned}
f(x) &= h(x)\mathrm{e}^{mx} \\
&= \left(\alpha \mathrm{e}^{-2mx} + \beta\right)\mathrm{e}^{mx} \\
&= \alpha \mathrm{e}^{-mx} + \beta \mathrm{e}^{mx}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_m) est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \alpha \mathrm{e}^{-mx} + \beta \mathrm{e}^{mx}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

4. Déterminons l'expressions de x.

   D'après la question précédente, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x(t) = \alpha \mathrm{e}^{-0,5t} + \beta \mathrm{e}^{0,5t}$.
   De plus, d'après l'énoncé, $x(0) = 4$ et $x'(0) = 0$ donc :

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 4 \\ -0,5\alpha + 0,5\beta & = 0 \end{cases}$$

Finalement

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-0,5t} + 2\mathrm{e}^{0,5t}.$$

Problème 4 : distance entre deux droites de l'espace.

Partie A : intersection de deux plans.

1. Il suffit de vérifier que les coordonnées de A données dans la question suivante vérifient les deux équations de plans.

   On peut également vérifier que les vecteurs normaux $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

   Déterminons $P \cap P'$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 5y & - & z & + & 20 & = & 0 \\ -2x & + & y & + & z & - & 8 & = & 0 \end{array}\right. .$$

$$L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 5y & - & z & + & 20 & = & 0 \\ & & 6y & & & + & 12 & = & 0 \end{array}\right.$$

   Nous en déduisons que l'intersection des plans n'est pas vide :

$$\boxed{P \text{ et } P' \text{ sont bien sécants.}}$$

   De plus $y = -2$ et, par substitution, $z = 2x + 10$.
   Nous en déduisons une représentation paramétrique de $D = P \cap P'$:

$$D : \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = -2 \\ z = 2t + 10 \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Vérifions que $A \in D$.

   $2x_A + 5y_A - z_A + 20 = 2 \times (-4) + 5 \times (-2) - 2 + 20 = 0$ donc $A \in P$.
   $-2x_A + y_A + z_A - 8 = -2 \times (-4) - 2 + 2 - 8 = 0$ donc $A \in P'$.
   Ainsi $A \in P \cap P'$.

$$\boxed{A \in D.}$$

   Déterminons un vecteur directeur de D.

   Nous pourrions choisir $\vec{n} \wedge \vec{n}'$.

Déterminons un point $B \in D$ tel que $x_B = 0$. On doit avoir :

$$\begin{cases} 5y_B - z_B + 20 & = 0 \\ y_B + z_B - 8 & = 0 \end{cases}$$

D'où : $y_B = -2$ et $z_B = 10$.
$B(0; -2; 10) \in D$.
Donc

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } D.}$$

3. Justifions qu'il s'agit d'une représentation paramétrique de D.

   On reconnaît effectivement la représentation paramétrique d'une droite.
   De plus si $t = 0$ on obtient les coordonnées de A et si $t = 4$ on obtient celles de B donc

   $$\boxed{\text{il s'agit d'une représentation paramétrique de la droite } D.}$$

Partie B : position relative de deux droites.

1. Montrons $D \not\parallel \Delta$.

   Des représentations paramétriques nous déduisons deux vecteurs respectivement de D et Δ :

   $$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

   Or $\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} = 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

   $$\boxed{D \not\parallel \Delta.}$$

2. Montrons que les droites ne sont pas sécantes.

   Raisonnons par l'absurde en supposant les droites sécantes.

Si elles sont sécantes alors elles ont un point d'intersection qui vérifie les deux représentation paramétriques. Autrement dit il existe t et t' tels que

$$\begin{cases} -4t = 5 \\ -2 = 2 + t' \\ 2 + 2t = t' \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} t = -\frac{5}{4} \\ t' = 0 \\ 2 + 2t = t' \end{cases}$$

La dernière équation contredit les deux premières. Nous avons démontré par l'absurde qu'il n'y a pas de point commun.

D et Δ ne sont pas sécantes.

3. D et Δ ne sont ni sécantes ni parallèles donc

D et Δ sont non coplanaires.

Partie C : distance entre deux droites.

1. Déterminons les triplets.

Puisque $I \in D$: $\exists t_I \in \mathbb{R},\ I(-4 + t_I; -2; 2 + 2t_I)$.
Puisque $J \in \Delta$: $\exists t_J \in \mathbb{R},\ J(5; 2 + t_J; t_J)$.
Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de D et Δ il faut que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{IJ} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{IJ} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} (9 - t_I) \times 1 + (4 + t_J) \times 0 + (t_J - 2 - 2t_I) \times 2 = 0 \\ (9 - t_I) \times 0 + (4 + t_J) \times 1 + (t_J - 2 - 2t_I) \times 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 - t_I + 2t_J - 4 - 4t_I = 0 \\ 4 + t_J + t_J - 2 - 2t_I = 0 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -5t_I & + & 2t_J & = & -5 \\ -2t_I & + & 2t_J & = & -2 \end{array}\right.$$

D'où $t_I = 1$ puis $t_J = 0$.

$$\boxed{(x_1, y_1, z_1) = (-3;-2;4) \text{ et } (x_2, y_2, z_2) = (5;2;0).}$$

2. En supposant le repère orthonormé, calculons IJ.

$$\begin{aligned} IJ &= \sqrt{(x_I - x_J)^2 + (y_I - y_J)^2 + (z_I - z_J)^2} \\ &= \sqrt{(-3-5)^2 + (-2-2)^2 + (4-0)^2} \\ &= \sqrt{96} \end{aligned}$$

$$\boxed{IJ = 4\sqrt{6}.}$$