Capes de mathématique de Mayotte 2023 épreuve 2.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 5 heures.

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions relevant de la circulaire du 17 juin 2021 BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème 1 : vrai ou faux.

Précisez si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'aire des mers et océans sur la Terre est d'environ 362 millions de km^2, pour une aire totale d'environ 510 millions de km^2. L'Océan Pacifique représente 46 % de la surface totale des mers et océans.

   Proposition : l'Océan Pacifique représente plus d'un tiers de la surface de la Terre.

   $\frac{46}{100} \times \frac{362}{510} \approx 0,3265 < 0,333\ldots$.

   La proposition est fausse.

2. Le code d'accès à un immeuble est un nombre de cinq chiffres.
   Ce code comporte un « 1 », un « 2 », un « 7 » et deux fois le chiffre « 8 ».

   Proposition : on peut composer 60 codes différents avec ces chiffres.

   * Le nombre de positions possibles pour les deux chiffres 8 est $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10$.
   * Une fois placer les chiffres 8 il reste 3 emplacements à remplir avec 3 chiffres distincts donc il s'agit de permuter ces trois chiffres. Il y a $3! = 6$ possibilités.

* D'après le principe multiplicatif le nombre total de possibilités est 10×6.

La proposition est vraie.

3. A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0,2$, $P_A(B) = 0,3$ et $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,56$.

   Proposition : les événements A et B sont indépendants.

   Déterminons si les événements sont indépendants.

   * Calculons $\mathbb{P}(A \cap B)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) \\ &= 0,2 \times 0,3 \\ &= 0,06 \end{aligned}$$

   * Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) \\ &= \left(1 - \mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right)\right) + 0,06 - 0,2 \\ &= \left(1 - \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)\right) - 0,14 \\ &= 1 - 0,56 - 0,14 \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

   * Déterminons l'indépendance de A et B.
     D'une part $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = 0,2 \times 0,3 = 0,06$ et d'autre part $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,06$ donc $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$.
     Ainsi A et B sont indépendants.

La proposition est vraie.

4. On considère un jeu pour lequel la probabilité de gagner est égale à $0,03$. Une personne décide d'y jouer n fois, chaque jeu étant indépendant des autres.

   Proposition : la probabilité que cette personne gagne au moins une fois au cours de ces n parties est supérieure à $0,5$ si et seulement si $n \geqslant 23$.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées parmi les 23.

Déterminons n tel que que$\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0,5$.

$X \hookrightarrow \mathscr{B}(n; 0,03)$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0)\\ &= 1 - \binom{n}{0} 0,03^0 \times (1 - 0,03)^n\\ &= 1 - 0,97^n\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0,5 &\Leftrightarrow 1 - 0,97^n \geqslant 0,5\\ &\Leftrightarrow 0,97^n \leqslant 0,5\end{aligned}$$

Puisque ln est croissante :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0,5 &\Leftrightarrow \ln(0,97^n) \leqslant \ln(0,5)\\ &\Leftrightarrow n \ln(0,97) \leqslant \ln(0,5)\end{aligned}$$

Puisque $\ln(0,97) < 0$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0,5 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,97)}$$

Or, en tronquant à 10^{-3}, $\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,97)} \approx 22,756$ donc pour que $\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0,5$ il faut que $n \geqslant 23$.

La proposition est vraie.

5. Un jeu consiste à lancer 20 fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancé on gagne 6 € si le nombre 1 apparaît. La mise est de 15 €.

   Proposition : on peut espérer un gain de 5 €.

Soient X la variable aléatoire comptant le nombre de fois que le chiffre 1 est obtenu parmi les 20 lancers et $Y = 6X - 15$ la variable aléatoire comptant les gains algébriques alors réalisés.

Calculons $\mathbb{E}(Y)$.

Pa linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = 6\mathbb{E}(X) - 15$$

Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(20; \frac{1}{6}\right)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 6 \times 20 \times \frac{1}{6} - 15 \\ &= 5\end{aligned}$$

La proposition est vraie.

6. Proposition : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right)$.
7. Proposition : l'équation $\cos 3x = \sin x$ admet six solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Calculons $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}\end{aligned}$$

La proposition est vraie.

8. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ telle que $f'(x) = 0$, pour tout réel x non nul.

   Proposition : il existe une constante réelle k telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = k$.

   Trouvons un contre exemple.

   Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 1, \text{ si } x > 0 \\ -1, \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

   $$\boxed{\text{La proposition est fausse.}}$$

9. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x}$.

   Proposition : la limite de f en 0 est $+\infty$.

   Étudions le comportement asymptotique de f en 0.

   $\frac{\sin(2x)}{x} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2x}{x}$.

   D'où : $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 2$.

   $$\boxed{\text{La proposition est fausse.}}$$

10. Soit P un polynôme de degré 3, à coefficients réels, et défini sur $\mathbb{C}$.

    Soit z une racine de P et soit $\overline{z}$ son conjugué.

    Proposition : $\overline{z}$ est également une racine du polynôme P.

    Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P(X) = aX^2 + bX + c$ et $z \in \mathbb{C}$une racine de P.

    $$P(\overline{z}) = a\overline{z}^2 + b\overline{z} + c$$

    Or la conjugaison est un automorphisme d'algèbre sur $\mathbb{C}$ donc :

    $$\begin{aligned} P(\overline{z}) &= \overline{az^2 + bz + c} \\ &= \overline{P(z)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

    Ainsi si $P(z) = 0$ alors $P(\overline{z}) = 0$.

    $$\boxed{\text{La proposition est vraie.}}$$

11. Soit (J_k) la suite définie par $J_k = \displaystyle\int_{e^{k-1}}^{e^k} \frac{\ln t}{t}\,dt$, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$.

Proposition : pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 1, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} J_k = \frac{n^2}{2}$.

Calculons la somme.

$$\sum_{k=1}^{n} J_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{e^{k-1}}^{e^k} \frac{\ln(t)}{t}\,dt$$

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} J_k &= \int_{1}^{e^n} \frac{\ln(t)}{t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{1}^{e^n} 2\frac{\ln(t)}{t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[(\ln(t))^2\right]_1^{e^n} \\ &= \frac{n^2}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La proposition est vraie.}}$$

12. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
A est le point de coordonnées $(0; 1)$.
(E) est l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant l'égalité :

$$\left|\left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i\right| = 2.$$

Proposition : (E) est le cercle de centre A et de rayon 1.

Déterminons (E).

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\left|\left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i\right| &= \left|\left(1 - i\sqrt{3}\right)z - i\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right| \\ &= \left|1 - i\sqrt{3}\right| \times |z - i| \\ &= 2\,|z - i|\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i\right|=2 \iff |z-i|=1.$$

La proposition est vraie.

13. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $K_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Proposition : pour tout entier naturel n non nul, $(n+1)K_n - K_{n+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Établissons une relation de récurrence pour la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.
$x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{n+1}(\ln(x))^{n+1}$ sont des fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,\mathrm{e}]$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} K_n &= \left[\frac{1}{x}\times\frac{1}{n+1}(\ln(x))^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{-1}{x^2}\times\frac{1}{n+1}(\ln(x))^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}(n+1)} + \frac{1}{n+1}K_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi : $(n+1)K_n = \frac{1}{e} + K_{n+1}$.

La proposition est vraie.

14. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```python
def surprise(n):
    k=0
    u=1
    while k<n:
        k=k+1
        u=u*2
    return u
```

Proposition : surprise(4) renvoie la valeur 16.

Interprétons la fonction Python.

La fonction calcule le terme de rang $n \in \mathbb{N}$ d'un suite géométrique de raison 2 et de terme initial $u_0 = 1$.
Donc $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = 2^k$.
En particulier $u_4 = 2^4 = 16$.

La proposition est vraie.

15. Proposition : pour tout entier naturel n, le nombre $n^3 - n$ est divisible par 6.

Divisibilité.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$n^3 - n^= n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$.
$n^3 - n$ est le produit de trois entiers consécutifs donc, nécessairement il est pair et divisible par 3.
Et par conséquent $n^3 - n$ est divisible par 6.

La proposition est vraie.

16. Proposition : $3^{2023} + 6$ est divisible par 11.

Démontrons que la nombre n'est pas divisible par 11.

Puisque les groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$ est d'ordre 10 : $3^{2023} \equiv 2^3 \mod [11] \equiv 8 \mod [11]$.
Donc $3^{2023} + 6 \equiv 8 + 6 \mod [11] \equiv 3 \mod [11]$.
$3^{2023} + 6$ n'est pas congru à 0 modulo 11.

La proposition est fausse.

17. Proposition : pour tout entier relatif k, $(7k+3)$ et $(2k+1)$ sont premiers entre eux.

18. Proposition : il existe des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation $51x + 39y = 1$.

$51x + 39y = 3(17x + 13y)$ or 3 ne divise pas 1 donc il n'existe pas de couple d'entier solution de l'équation.

La proposition est fausse.

19. On pose $A = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$.

Proposition : A est un nombre rationnel.

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que A est rationnel.
Autrement dit il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $A = \frac{a}{b}$ car $A > 0$.
Or

$$\begin{aligned} A = \frac{a}{b} &\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{a}{b} \\ &\Leftrightarrow b\ln(2) = a\ln(3) \end{aligned}$$

Puisque exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} A = \frac{a}{b} &\Leftrightarrow \exp\left(b\ln(2)\right) = \exp\left(a\ln(3)\right) \\ &\Leftrightarrow 2^b = 3^a \end{aligned}$$

Ce qui est impossible puisque les nombres n'ont aucun facteurs commun.

La proposition est fausse.

20. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour tout entier naturel n.

Proposition : tous les termes de la suite (u_n) sont des carrés parfaits.

Soit $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = (n+1)^1$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* $u_0 = 1 = (0+1)^2$ donc $\mathscr{P}(0)$ st vraie.
* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie.
  Or

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On a démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)^2$.

$$\boxed{\text{La proposition est vraie.}}$$

Problème 2 : suites.

On considère :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$;
- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = u_n\mathrm{e}^{-u_n}$;
- la suite (S_n) définie, pour tout entier naturel n, par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Partie A : étude de la fonction f.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

Sans difficulté, avec les règles opératoires sur les limites :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty.}$$

Par croissance comparée :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

2. Étudier les variations de la fonction f.

Étudions les variations de f.

f est un produit d'applications dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} \\ &= (1-x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

D'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

Résolvons l'équation.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow x\mathrm{e}^{-x} = x \\ &\Leftrightarrow x(\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0 \\ &\leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{-x} = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -x = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = x$ est $\{0\}$.

Partie B : étude de la suite (u_n).

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

Démontrons par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n.

* $u_0 = 1 > 0$.
* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n > 0$.
  f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après la question précédente donc : $f(u_n) > 0$, *i.e.* $u_{n+1} > 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.$$

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Démontrons par une récurrence forte que $u_n > u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* $u_1 = e^{-1} < 1 = u_0$.
* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $i \in [\![0, k]\!]$ $u_i > u_{i+1}$.
  Ainsi, et en tenant compte de la question précédente, $1 > u_k > u_{k+1} > 0$.
  Puisque f est strictement croissante sur $[0, 1]$: $f(u_k) > f(u_{k+1})$. Autrement dit $u_{n+1} > u_{n+2}$.

On a démontré : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

3. Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminez sa limite.

   Concluons quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) D'après ce qui précède $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc convergente. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.

   (b) Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ nécessairement $f(\ell) = \ell$.
   Donc, d'après la question A.3., $\ell = 0$.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Partie C : étude de la suite (S_n).

1. Déterminer le sens de variation de (S_n).

   Monotonie de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. $S_{n+1} - S_n = u_n > 0$.

$$\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e^{-S_n}$.

   Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-S_n}$.

   * $u_1 = e^{-1}$ et $e^{-\sum_{k=0}^{0} u_k} = e^{-1}$ donc $u_1 = e^{-S_0}$.

* Soit $i \in \mathbb{N}$.
Supposons $u_{i+1} = \mathrm{e}^{-S_i}$.

$$u_{i+2} = u_{i+1}\mathrm{e}^{-u_{i+1}}$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{i+2} &= \mathrm{e}^{-S_i}\mathrm{e}^{-u_{i+1}} \\ &= \mathrm{e}^{-u_{i+1}-S_i} \\ &= \mathrm{e}^{-S_{i+1}} \end{aligned}$$

On a démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}.}$$

3. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Étudions la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ et $\ln(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} -\infty$ donc en composant : $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = \ln\left(\mathrm{e}^{-S_n}\right) = -S_n$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.}$$

Problème 3 : équation différentielle.

Soit m un nombre réel.
On considère l'équation différentielle (E_m) : $y'' - m^2 y = 0$.
Soit h une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (P_m) :

$$\text{pour tout réel } x,\ h''(x) + 2mh'(x) = 0.$$

1. Déterminer, en fonction de m, l'expression de la fonction h', puis celle de h.

Déterminons h.

h' est solution de l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 1 : $y' + 2my = 0$.
Donc : $\exists \mu \in \mathbb{R},\ h' : x \mapsto \mu e^{-2mx}$.
Enfin :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ h : x \mapsto \alpha e^{-2mx} + \beta.$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = h(x)e^{mx}$.
   Démontrer que f est une solution de (E_m) si et seulement si h vérifie la propriété (P_m).

   Démontrons l'équivalence.

$$\begin{aligned}
&f'' - m^2 f = 0\\
&\iff h''(x)e^{mx} + mh'(x)e^{mx} + mh'(x)e^{mx} + m^2h(x)e^{mx} - m^2h(x)e^{mx} = 0\\
&\iff h''(x)e^{mx} + 2mh'(x)e^{mx} = 0\\
&\iff \left(h''(x) + mh'(x)\right)e^{mx} = 0\\
&\iff h''(x) + mh'(x) = 0
\end{aligned}$$

   f est solution de (E_m) si et seulement si h est solution de (P_m).

3. Résoudre l'équation différentielle (E_m).

   Résolvons (E_m).

   D'après la question précédente l'ensemble des solutions est formé des fonctions définies par

$$\begin{aligned}
f(x) &= h(x)e^{mx}\\
&= \left(\alpha e^{-2mx} + \beta\right)e^{mx}\\
&= \alpha e^{-mx} + \beta e^{mx}
\end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions de (E_m) est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \alpha e^{-mx} + \beta e^{mx}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

4. Le mouvement rectiligne du centre de gravité d'un solide est repéré sur un axe gradué d'origine O. On note x la fonction donnant son abscisse en fonction du temps t.
   À l'instant $t = 0$, le solide est au point d'abscisse 4 et sa vitesse est nulle.
   x est solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle $(E_{0,5})$: $y'' - 0,25y = 0$.
   Déterminer l'expression de la fonction x.

   Déterminons l'expressions de x.

   D'après la question précédente, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x(t) = \alpha \mathrm{e}^{-0,5t} + \beta \mathrm{e}^{0,5t}$.
   De plus, d'après l'énoncé, $x(0) = 4$ et $x'(0) = 0$ donc :

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 4 \\ -0,5\alpha + 0,5\beta & = 0 \end{cases}$$

   Finalement

$$\boxed{x(t) = 2\mathrm{e}^{-0,5t} + 2\mathrm{e}^{0,5t}.}$$

Problème 4 : distance entre deux droites de l'espace.

L'espace est muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
P est le plan d'équation : $2x + 5y - z + 20 = 0$.
P' est le plan d'équation : $-2x + y + z - 8 = 0$.

Partie A : intersection de deux plans.

1. Justifier que les plans P et P' sont sécants.

   Il suffit de vérifier que les coordonnées de A données dans la question suivante vérifient les deux équations de plans.

   On peut également vérifier que les vecteurs normaux $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

   Déterminons $P \cap P'$.

$$\begin{cases} 2x & + & 5y & - & z & + & 20 & = & 0 \\ -2x & + & y & + & z & - & 8 & = & 0 \end{cases}.$$

$$L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 5y & - & z & + & 20 & = & 0 \\ & & 6y & & & + & 12 & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous en déduisons que l'intersection des plans n'est pas vide :

P et P' sont bien sécants.

De plus $y = -2$ et, par substitution, $z = 2x + 10$.
Nous en déduisons une représentation paramétrique de $D = P \cap P'$:

$$D : \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = -2 \\ z = 2t + 10 \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

On notera D la droite d'intersection des plans P et P'.

2. Vérifier que le point $A(-4; -2; 2)$ appartient à la droite D puis déterminer un vecteur directeur de cette droite.

Vérifions que $A \in D$.

$2x_A + 5y_A - z_A + 20 = 2 \times (-4) + 5 \times (-2) - 2 + 20 = 0$ donc $A \in P$.
$-2x_A + y_A + z_A - 8 = -2 \times (-4) - 2 + 2 - 8 = 0$ donc $A \in P'$.
Ainsi $A \in P \cap P'$.

$A \in D$.

Déterminons un vecteur directeur de D.

Nous pourrions choisir $\vec{n} \wedge \vec{n}'$.
Déterminons un point $B \in D$ tel que $x_B = 0$. On doit avoir :

$$\left\{\begin{array}{ll} 5y_B - z_B + 20 & = 0 \\ y_B + z_B - 8 & = 0 \end{array}\right.$$

D'où : $y_B = -2$ et $z_B = 10$.
$B(0; -2; 10) \in D$.
Donc

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

3. Justifier que la droite D a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -4 + t \\ y = -2 \\ z = 2 + 2t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

Justifions qu'il s'agit d'une représentation paramétrique de D.

On reconnaît effectivement la représentation paramétrique d'une droite.
De plus si $t = 0$ on obtient les coordonnées de A et si $t = 4$ on obtient celles de B donc

$$\boxed{\text{il s'agit d'une représentation paramétrique de la droite } D.}$$

Partie B : position relative de deux droites.

Δ est la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}, \text{ ou } t \in \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les droites D et Δ ne sont pas parallèles.

Montrons $D \nparallel \Delta$.

Des représentations paramétriques nous déduisons deux vecteurs respectivement de D et Δ :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Or $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$$\boxed{D \nparallel \Delta.}$$

2. Justifier que les droites D et Δ ne sont pas sécantes.

Montrons que les droites ne sont pas sécantes.

Raisonnons par l'absurde en supposant les droites sécantes.

Si elles sont sécantes alors elles ont un point d'intersection qui vérifie les deux représentation paramétriques. Autrement dit il existe t et t' tels que

$$\begin{cases} -4t = 5 \\ -2 = 2 + t' \\ 2 + 2t = t' \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} t = -\frac{5}{4} \\ t' = 0 \\ 2 + 2t = t' \end{cases}$$

La dernière équation contredit les deux premières. Nous avons démontré par l'absurde qu'il n'y a pas de point commun.

D et Δ ne sont pas sécantes.

3. Que peut-on en déduire quant aux droites D et Δ ?

   D et Δ ne sont ni sécantes ni parallèles donc

   D et Δ sont non coplanaires.

Partie C : distance entre deux droites.

Soit $I(x_1, y_1, z_1)$ un point de la droite D et $J(x_2, y_2, z_2)$ un point de la droite Δ.

1. Pour quelles valeurs des triplets (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) la droite (IJ) est-elle à la fois perpendiculaire à D et à Δ ?

   Déterminons les triplets.

   Puisque $I \in D$: $\exists t_I \in \mathbb{R},\ I(-4 + t_I; -2; 2 + 2t_I)$.
   Puisque $J \in \Delta$: $\exists t_J \in \mathbb{R},\ J(5; 2 + t_J; t_J)$.
   Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de D et Δ il faut que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{IJ} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{IJ} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{l}(9-t_I)\times 1+(4+t_J)\times 0+(t_J-2-2t_I)\times 2=0\\(9-t_I)\times 0+(4+t_J)\times 1+(t_J-2-2t_I)\times 1=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}9-t_I+2t_J-4-4t_I=0\\4+t_J+t_J-2-2t_I=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr}-5t_I&+&2t_J&=&-5\\-2t_I&+&2t_J&=&-2\end{array}\right.$$

D'où $t_I=1$ puis $t_J=0$.

$$\boxed{(x_1,y_1,z_1)=(-3;-2;4) \text{ et } (x_2,y_2,z_2)=(5;2;0).}$$

2. En déduire la valeur exacte de la distance entre les droites D et Δ.

En supposant le repère orthonormé, calculons IJ.

$$\begin{aligned}IJ&=\sqrt{(x_I-x_J)^2+(y_I-y_J)^2+(z_I-z_J)^2}\\&=\sqrt{(-3-5)^2+(-2-2)^2+(4-0)^2}\\&=\sqrt{96}\end{aligned}$$

$$\boxed{IJ=4\sqrt{6}.}$$