Capes de mathématique de Mayotte 2023 épreuve 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Problème 1 : suite d'intégrales.

1. Calculons I_0.

   $x \mapsto (x-2)^0 \mathrm{e}^x$ est un produit de fonctions continues donc est continue sur $[2;3]$ et donc intégrable.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_2^3 (x-2)^0 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= \int_2^3 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\mathrm{e}^x\right]_2^3 \\ &= \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{I_0 = \mathrm{e}^2(\mathrm{e}-1).}$$

2. Étudions la monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $x \mapsto (x-2)^n \mathrm{e}^x$ est un produit de fonctions continues donc est continue sur $[2;3]$ et donc intégrable.
   Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_2^3 (x-2)^{n+1}\mathrm{e}^x - (x-2)^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= \int_2^3 (x-2)^n \left(x-2-1\right) \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= \int_2^3 (x-2)^n \left(x-3\right) \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Or $(x-2)^n \mathrm{e}^x \geqslant 0$ et $x-3 \leqslant 0$ pour tout $x \in [2;3]$ donc $(x-2)^n(x-3)\mathrm{e}^x \leqslant 0$ pour tout $x \in [2;3]$.

Par positivité de l'intégrale nous en déduisons : $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
Ceci étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

Nous aurions pu démontrer un peu mieux, à savoir la stricte décroissance de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Justifions que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $x \mapsto (x-2)^n \mathrm{e}^x$ est positive sur $[2;3)$ donc, par positivité de l'intégrale $I_n \geqslant 0$.

   $$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } 0.}$$

4. Convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   D'après les question précédentes, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de limite monotone,

   $$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

5. * Établissons une relation de récurrence d'ordre 1 pour $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

     Soit $n \in \mathbb{N}$.

     $$I_{n+1} = \int_2^3 (x-2)^{n+1} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

     $x \mapsto (x-2)^{n+1}$ et exp sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2;3]$ donc en intégrant par parties :

     $$I_{n+1} = \left[(x-2)^{n+1}\mathrm{e}^x\right]_2^3 - \int_2^3 (n+1)(x-2)^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

     Par linéarité de l'intégrale :

     $$I_{n+1} = \mathrm{e}^3 - (n+1)\int_2^3 (x-2)^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \mathrm{e}^3 - (n+1)I_n.}$$

* calculons I_1 et I_2.

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{e}^3 - (0+1)I_0 \\ &= \mathrm{e}^3 - (\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^2) \end{aligned}$$

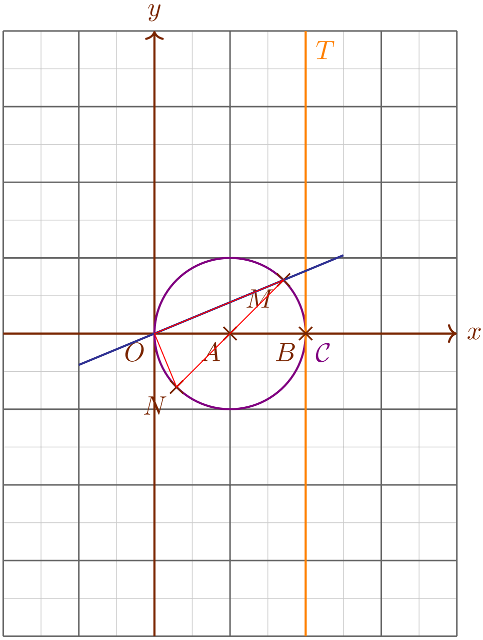
$$\boxed{I_1 = \mathrm{e}^2.}$$

$$I_2 = \mathrm{e}^3 - (1+1)I_1$$

$$\boxed{I_2 = \mathrm{e}^3 - 2\mathrm{e}^2.}$$

6.
```
from math import exp
    def I(p):
        i=exp(3)-exp(2)
        for k in range(1,p+1):
            i=exp(3)-k*i
        return i
```

Problème 2 : complexes et médiatrices.



Partie A.

1. Déterminons une équation de T.

   Puisque T est tangente à $\mathcal{C}$ de centre A en B, $\overrightarrow{AB}$ est normal à T.
   Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, *i.e.* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ de sorte qu'une équation cartésienne de T est
   $$1 \times x + 0 \times y + c = 0.$$
   Comme de plus $B \in T$ les coordonnées de B vérifient les équations cartésiennes de T : $1 \times x_B + 0 \times y_B + c = 0$.
   Ainsi $c = -2$.

   $$\boxed{T : \; x - 2 = 0.}$$

2. Montrons que $E = \mathcal{C}$ où $E = \{M_\theta \mid \theta \in]-\pi; \pi]\}$.

* Soit $\theta \in]-\pi;\pi]$.

$$\begin{aligned} M_\theta A &= |z_\theta - z_A| \\ &= |(\cos(\theta)+1) + i\sin(\theta) - 1| \\ &= |\cos(\theta) + i\sin(\theta)| \\ &= 1 \end{aligned}$$

  donc M_θ appartient au cercle de centre A et de rayon 1.
  Autrement dit $E \subset \mathcal{C}$.
* Soit $M \in \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} AM = 1 &\Leftrightarrow |z_M - z_A| = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists\theta \in]-\pi;\pi],\ z_M - z_A = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ &\Leftrightarrow \exists\theta \in]-\pi;\pi],\ z_M - 1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ &\Leftrightarrow \exists\theta \in]-\pi;\pi],\ z_M = \cos(\theta) + 1 + i\sin(\theta) \\ &\Leftrightarrow z_M \in E \end{aligned}$$

  Ainsi : $\mathcal{C} \subset E$.

$$\boxed{E = \mathcal{C}.}$$

3. $\cos(0) + 1 + i\sin(0) = 2$ donc

$$\boxed{M_0 = B.}$$

4. Cherchons les valeurs de θ pour lesquelles les droites sont parallèles.

   Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$.

   * B et le point de coordonnées $(2,1)$ appartiennent à T donc $\vec{d}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T.
   * $\overrightarrow{OM_\theta}\begin{pmatrix}\cos(\theta)+1\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (OM_θ) (vecteur non nul car $\theta \neq \pi$).

* (OM_θ) et T sont parallèles si et seulement si

$$\det\left(\vec{d},\overrightarrow{OM_\theta}\right)=0$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0 & \cos(\theta)+1\\ 1 & \sin(\theta)\end{vmatrix}&=0\\ \cos(\theta)+1&=0\\ \cos(\theta)&=-1\\ \theta&\equiv\pi \mod (2\pi)\end{aligned}$$

Or $\theta\in]-\pi,\pi[$ donc $\det\left(\vec{d},\overrightarrow{OM_\theta}\right)\neq 0$ et les droites ne sont pas parallèles.

Remarquons de plus que $M_\pi=O$ et dans ce cas (OM_π) n'est pas une droite mais un point.

Pour tout $\theta\in]-\pi;\pi[$, T et (OM_θ) sont sécantes.

5. Déterminons z_N.

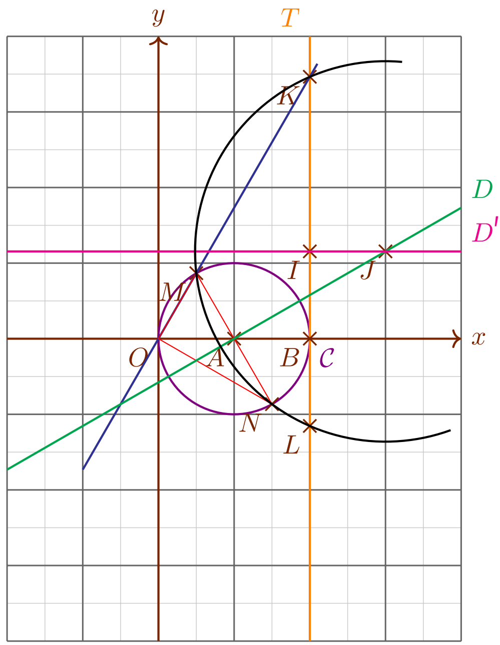
Par construction $\mathcal{C}$ est circonscrit au triangle $OM_\theta N$ donc dire que « $OM_\theta N$ est rectangle en O » équivaut successivement à :
« $M_\theta N$ est un diamètre de $\mathcal{C}$ »,
« A est le milieu de $[M_\theta N]$ »,
« $\overrightarrow{M_\theta A}=\overrightarrow{AN}$ »,
« $z_A-z_\theta=z_N-z_A$ ».
Or

$$\begin{aligned}z_A-z_\theta=z_N-z_A &\iff 1-[1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)]=z_N-1\\ &\iff z_N=1-\cos(\theta)-i\sin(\theta)\end{aligned}$$

Ainsi

$OM_\theta N$ est rectangle en O si et seulement si
$z_N=1-\cos(\theta)-i\sin(\theta)$.

Partie B.



1. Calculons z_N.

$$\begin{aligned} z_N &= 1 - \cos(\theta) - i\sin(\theta) \\ &= 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_N = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

2. Déterminons une équation cartésienne de D.

Puisque D est la médiatrice de $[MN]$, $\overrightarrow{MN}$ est normal à D.

Or $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$, *i.e.* $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$D: \ x - \sqrt{3}y + c = 0.$$

Comme de plus $A \in D$ (A étant équidistant de M et N en tant que milieu du segment $[MN]$) on doit avoir

$$x_A - \sqrt{3}y_A + c = 0,$$

d'où $c = -1$.
Finalement

$$\boxed{D: \ x - \sqrt{3}y - 1 = 0.}$$

3. * Déterminons les coordonnées de K.
   $K \in (OM)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$z_K = z_O + \lambda(z_M - z_O)$$

   Cette dernière assertion équivaut à :

$$\begin{aligned} x_K + iy_K &= \lambda\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + i\lambda\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\lambda}{2} + i\lambda\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

   Puisque $K \in T$ nécessairement : $x_K = 2$ et donc $\lambda = 4$. Enfin $y_K = 2\sqrt{3}$.

   * Déterminons les coordonnées de L.
   $L \in (ON)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$z_L = z_O + \lambda(z_N - z_O)$$

   Cette dernière assertion équivaut à :

$$x_L + iy_L = \frac{3\lambda}{2} - i\lambda\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Puisque $L \in T$ nécessairement : $x_L = 2$ et donc $\lambda = \frac{4}{3}$. Enfin $y_L = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

* $z_I = \frac{1}{2}(z_K + z_L)$ donc

$$\boxed{z_I = 2 + i\frac{2}{3}\sqrt{3}.}$$

4. Déterminons une équation de D'.

Le repère est orthogonal, D' est perpendiculaire à T et $T : \ x = 2$, D' a une équation de forme $y = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Comme $I \in D'$

$$\boxed{D' : \ y = \frac{2}{3}\sqrt{3}.}$$

5. Justifions l'existence d'un point équidistant à N, M, K, et L.

Procédons par analyse-synthèse.

* Si un tel point J existe alors, puisqu'il est équidistant à N et à M nécessairement $J \in D$ et puisqu'il est équidistant à K et à L nécessairement $J \in D'$.
  Par conséquent $y_J = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ puis $x_J - \sqrt{3}\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1 = 0$ et donc $x_J = 3$.
  Ainsi $J\left(3; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$.
* Il reste à vérifier que J est bien équidistant de, par exemple, N et K.

$$\begin{aligned}
|z_J - z_K| &= \sqrt{(3-2)^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + \frac{16}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{19}{3}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|z_J - z_N| &= \sqrt{\left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{49}{12}} \\
&= \sqrt{\frac{19}{3}}
\end{aligned}$$

$J\left(3; \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ est équidistant des points N, M, K et L.

Problème 3 : géométrie dans l'espace.

1. Démontrons que ABC est rectangle en A.

   Le repère étant orthogonal, ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
   Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + (-1) \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$.
   Finalement

   ABC est rectangle en A.

2. Démontrons ue (BD) est orthogonale aà (ABC).

   * $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est une base de (ABC) puisque $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \neq 0$.
   * $\overrightarrow{BD} \neq \vec{0}$ donc c'est un vecteur directeur de (BD).
   * Ainsi (BD) est orthogonale à (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.
   * On vérifie aisément $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

   Finalement

   (BD) est orthogonale à (ABC).

3. Calculons le volume $\mathscr{V}(ABCD)$ de $ABCD$.

   Puisque (BD) est orthogonale au plan (ABC), c'est la hauteur issue de D du tétraèdre.
   Par conséquent, en notant $\mathscr{A}(ABC)$ l'aire du triangle ABC :

$$\mathscr{V}(ABCD) = \frac{1}{3} BD \times \mathscr{A}(ABC)$$

Puisque ABC est rectangle en A :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(ABCD) &= \frac{1}{3}BD \times \frac{1}{2}AB \times AC \\ &= \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}(ABCD) = 2.}$$

4. Déterminons une équation cartésienne de (ACD).

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\times 1-(-1)\times 1\\-(0\times 1-(-1)\times 4)\\0\times 1-1\times 4\end{pmatrix}$ *i.e.* $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix}$.

Puisque, par construction, $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$ est orthogonal à (ACD), il existe $d \in \mathbb{R}$ tel qu'une équation cartésienne de (ACD) est

$$x - 2y - 2z + d = 0.$$

Comme de plus $A \in (ACD)$: $-1-2\times 2-2\times 4+d = 0$ et donc nécessairement $d = 13$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } (ACD) \text{ est } x - 2y - 2z + 13 = 0.}$$

5. Déterminons les coordonnées de H.

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ construit au cours réponse précédente est un vecteur directeur de Δ d'où une représentation paramétrique :

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

$H \in \Delta$ donc il existe $t_H \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_H = 1 + t_H \\ y_H = 1 - 2t_H \\ z_H = 3 - 2t_H \end{cases}, \ (1).$$

Comme $H \in (ACD)$: $x_H - 2y_H - 2z_H + 13 = 0$ et en substituant d'après (1) :

$$1 + t_H - 2(1 - 2t_H) - 2(3 - 2t_H) + 13 = 0.$$

Enfin $t_H = -\frac{2}{3}$ et en évaluant dans (1) :

$$\boxed{H\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right).}$$

6. Calculons l'aire $\mathscr{A}(ACD)$ de ACD.

   Puisque $[BH]$ est la hauteur de $ABCD$ issue de B :

$$\mathscr{A}(ACD) = \frac{\mathscr{V}(ABCD)}{BH}$$

   Le repère étant orthonormé, $BH = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{7}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{13}{3} - 3\right)^2} = 2$ et donc :

$$\mathscr{A}(ACD) = \frac{2}{2}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ACD) = 1.}$$

Problème 4 : équation fonctionnelle.

Partie A. Existence d'une fonction satisfaisant la propriété (E).

Justifions que f_m vérifie (E).

f_m est définie est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f_m(x+y) \times f_m(x-y) &= \mathrm{e}^{m(x+y)^2} \times \mathrm{e}^{m(x-y)^2} \\ &= \mathrm{e}^{mx^2+2mxy+y^2} \times \mathrm{e}^{mx^2-2mxy+y^2} \\ &= \mathrm{e}^{mx^2} \times \mathrm{e}^{2mxy} \times \mathrm{e}^{y^2} \times \mathrm{e}^{mx^2} \times \mathrm{e}^{-2mxy} \times \mathrm{e}^{y^2} \\ &= \mathrm{e}^{2mx^2} \times \mathrm{e}^{2my^2} \times \mathrm{e}^{0} \\ &= \left(\mathrm{e}^{mx^2}\right)^2 \times \left(\mathrm{e}^{my^2}\right)^2 \\ &= (f_m(x))^2 \times (f_m(y))^2 \end{aligned}$$

f_m vérifie (E).

Partie B. Propriétés des fonctions satisfaisant la propriété (E).

1. Résolvons l'équation proposée.

$$\begin{aligned} x^4 = x^2 &\iff x^4 - x^2 = 0 \\ &\iff x^2(x^2 - 1) = 0 \\ &\iff x^2(x-1)(x+1) = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\{0; 1; -1\}$.

2.

3. Montrons que si f vérifie (E) alors $f(0) \in \{-1; 0; 1\}$.

Si f vérifie (E) alors, en particulier, pour $x = y = 0$ nous avons : $f(0) \times f(0) = f(0)^2 \times f(0)^2$.
Autrement dit $f(0)^2 = f(0)^4$ et d'après la question précédente :

$f(0) \in \{-1; 0; 1\}$.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$.

Démontrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$.

Notons $\mathscr{P}(n)$: « $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$ et démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* $f\left(\frac{a}{2^0}\right) = f(a) = 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
  Puisque f vérifie (E) :

$$f\left(\frac{\frac{a}{2^n}}{2}+\frac{\frac{a}{2^n}}{2}\right)\times f\left(\frac{\frac{a}{2^n}}{2}-\frac{\frac{a}{2^n}}{2}\right)=f\left(\frac{\frac{a}{2^n}}{2}\right)^2\times f\left(\frac{\frac{a}{2^n}}{2}\right)^2$$
$$f\left(\frac{a}{2^n}\right)\times f(0)=f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)^4$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$0=f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)^4$$
$$0=f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\text{si } f(a)=0 \text{ alors : } \forall n\in\mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^n}\right)=0.}$$

5. Raisonnons par l'absurde.

   Supposons que f n'est ni strictement négative ni strictement positive.

   S'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)=0$ alors, d'après la question précédente f est la fonction nulle ce qui est impossible.

   Sinon il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha<\beta$ et $f(\alpha)f(\beta)<0$. Puisque f est supposée continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists a\in\ ]\alpha,\beta[,\ f(a)=0$.
   Dans ce cas, d'après la question précédente $f=0$ ce qui est impossible.

   Dans les deux nous obtenons une contradiction.

   $$\boxed{f \text{ est soit strictement positive, soit strictement négative.}}$$

Partie C. Identification des fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la propriété (E).

1. Calculons $g(0)$.

   D'après la question B.2), $f(0) \in \{-1; 1; 0\}$ or f est strictement positive donc $f(0) = 1$. Enfin $\ln \circ f(0) = 0$.

   $$\boxed{g(0) = 0.}$$

2. Soient x et y des réels.

   Démontrons que $g(x+y) + g(x-y) = 2\left(g(x) + g(y)\right)$.

   Puisque f est strictement positive et vérifie (E) :

   $$\ln\left(f(x+y) \times f(x-y)\right) = \ln\left((f(x))^2 \times (f(y))^2\right)$$

   Nous en déduisons :

   $$\ln \circ f(x+y) + \ln \circ f(x-y) = 2\ln \circ f(x) + 2\ln \circ f(y)$$

   Ainsi

   $$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) + g(x-y) = 2\left(g(x) + g(y)\right).}$$

3. Démontrons par une récurrence double que l'assertion $\mathscr{Q}(n)$: « $g(n) = n^g(1)$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) $g(0) = 0$ d'après C.1. donc $g(0) = g(1) \times 0^2$ est vraie.
   Clairement $g(1) = g(1) \times 1^2$.
   Ainsi $\mathscr{Q}(0)$ et $\mathscr{Q}(1)$ sont vraies.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathscr{Q}(n-1)$ et $\mathscr{Q}(n)$ sont vraies.
   Démontrons que $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.
   D'après C.2.

   $$g(n+1) + g(n-1) = 2\left(g(n) + g(1)\right)$$

   D'où

   $$g(n+1) = 2g(n) + 2g(1) - g(n-1)$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} g(n+1) &= 2n^2 g(1) + 2g(1) - (n-1)^2 g(1) \\ &= \left(2n^2 + 2 - (n-1)^2\right) g(1) \\ &= \left(n^2 + 2n + 1\right) g(1) \\ &= (n+1)^2 g(1) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.

(c) Nous avons démontré par une récurrence double que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ g(n) = n^2 g(1).}$$

4. * Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

   Montrons que $g\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{g(1)}{p^2}$.

   D'après l'énoncé (pour $x = \frac{1}{p}$ et $p = n$) on a : $g\left(p\frac{1}{p}\right) = p^2 g\left(\frac{1}{p}\right)$.
   Donc

$$\boxed{g\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{g(1)}{p^2}.}$$

   * Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{n}{p}\right) &= n^2 g\left(\frac{1}{p}\right) \\ &= n^2 \frac{1}{p^2} g(1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ g\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{n^2}{p^2} g(1).}$$

5. Déterminons l'expression de f.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \exp \circ g(x) \\
&= \exp\left(g(1)x^2\right) \\
&=
\end{aligned}
$$

Les fonctions f définies, continues et strictement positives sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété (E) sont celles de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x^2}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.