Capes de mathématique de Mayotte 2023 épreuve 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 5 heures.

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions relevant de la circulaire du 17 juin 2021 BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème 1 : suite d'intégrales.

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$I_n = \int_2^3 (x-2)^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.

   Calculons I_0.

   $x \mapsto (x-2)^0 \mathrm{e}^x$ est un produit de fonctions continues donc est continue sur $[2;3]$ et donc intégrable.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_2^3 (x-2)^0 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= \int_2^3 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\mathrm{e}^x\right]_2^3 \\ &= \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{I_0 = \mathrm{e}^2(\mathrm{e}-1).}$$

2. Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).

   Étudions la monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $x \mapsto (x-2)^n \mathrm{e}^x$ est un produit de fonctions continues donc est continue sur $[2;3]$ et donc intégrable.
   Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_2^3 (x-2)^{n+1}\mathrm{e}^x - (x-2)^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= \int_2^3 (x-2)^n \,(x-2-1)\,\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= \int_2^3 (x-2)^n \,(x-3)\,\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Or $(x-2)^n \mathrm{e}^x \geqslant 0$ et $x-3 \leqslant 0$ pour tout $x \in [2;3]$ donc $(x-2)^n(x-3)\mathrm{e}^x \leqslant 0$ pour tout $x \in [2;3]$.
   Par positivité de l'intégrale nous en déduisons : $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   Ceci étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Nous aurions pu démontrer un peu mieux, à savoir la stricte décroissance de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. La suite (I_n) est-elle minorée ?

   Justifions que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $x \mapsto (x-2)^n \mathrm{e}^x$ est positive sur $[2;3)$ donc, par positivité de l'intégrale $I_n \geqslant 0$.

   $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.

4. Établir la convergence de la suite (I_n).

   Convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   D'après les question précédentes, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de limite monotone,

$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

5. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
   En déduire les valeurs exactes de I_1 puis de I_2.

   * Établissons une relation de récurrence d'ordre 1 pour $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

     Soit $n \in \mathbb{N}$.

     $$I_{n+1} = \int_2^3 (x-2)^{n+1}\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

     $x \mapsto (x-2)^{n+1}$ et exp sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2;3]$ donc en intégrant par parties :

     $$I_{n+1} = \left[(x-2)^{n+1}\mathrm{e}^x\right]_2^3 - \int_2^3 (n+1)(x-2)^n\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

     Par linéarité de l'intégrale :

     $$I_{n+1} = \mathrm{e}^3 - (n+1)\int_2^3 (x-2)^n\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \mathrm{e}^3 - (n+1)I_n.}$$

   * calculons I_1 et I_2.

     $$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{e}^3 - (0+1)I_0 \\ &= \mathrm{e}^3 - (\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^2) \end{aligned}$$

     $$\boxed{I_1 = \mathrm{e}^2.}$$

     $$I_2 = \mathrm{e}^3 - (1+1)I_1$$

     $$\boxed{I_2 = \mathrm{e}^3 - 2\mathrm{e}^2.}$$

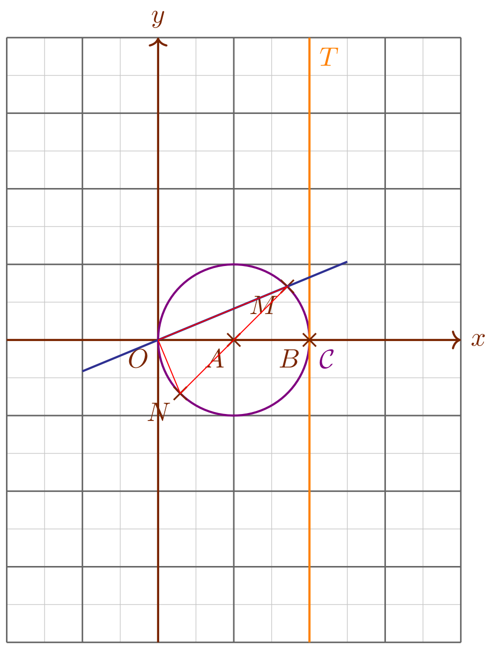
6. Soit p un entier naturel non nul.
   Écrire un algorithme, en langage Python, permettant de calculer I_p.

```
from math import exp
    def I(p):
        i=exp(3)-exp(2)
        for k in range(1,p+1):
            i=exp(3)-k*i
        return i
```

Problème 2 : complexes et médiatrices.

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ orthonormé direct. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 2$. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon 1. T est la tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point B.

Pour tout nombre réel θ de l'intervalle $]-\pi,\pi]$, on pose $z_\theta = (\cos\theta + 1) + i\sin\theta$. On note M_θ le point du plan d'affixe z_θ.



Partie A.

1. Donner une équation de la droite T.

Déterminons une équation de T.

Puisque T est tangente à $\mathcal{C}$ de centre A en B, $\overrightarrow{AB}$ est normal à T.
Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, *i.e.* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ de sorte qu'une équation cartésienne de T est

$$1 \times x + 0 \times y + c = 0.$$

Comme de plus $B \in T$ les coordonnées de B vérifient les équations cartésiennes de T : $1 \times x_B + 0 \times y_B + c = 0$.
Ainsi $c = -2$.

$$\boxed{T: \ x - 2 = 0.}$$

2. Justifier que l'ensemble des points M_θ lorsque θ varie sur $]-\pi;\pi]$ est le cercle $\mathcal{C}$.

Montrons que $E = \mathcal{C}$ où $E = \{M_\theta \mid \theta \in]-\pi;\pi]\}$.

* Soit $\theta \in]-\pi;\pi]$.

$$\begin{aligned} M_\theta A &= |z_\theta - z_A| \\ &= |(\cos(\theta) + 1) + i\sin(\theta) - 1| \\ &= |\cos(\theta) + i\sin(\theta)| \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc M_θ appartient au cercle de centre A et de rayon 1.
Autrement dit $E \subset \mathcal{C}$.

* Soit $M \in \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} AM = 1 &\iff |z_M - z_A| = 1 \\ &\iff \exists \theta \in]-\pi;\pi],\ z_M - z_A = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ &\iff \exists \theta \in]-\pi;\pi],\ z_M - 1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ &\iff \exists \theta \in]-\pi;\pi],\ z_M = \cos(\theta) + 1 + i\sin(\theta) \\ &\iff z_M \in E \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{C} \subset E$.

$$E = \mathcal{C}.$$

3. Que peut-on dire du point M_θ lorsque $\theta = 0$?

   $\cos(0) + 1 + i\sin(0) = 2$ donc

   $$M_0 = B.$$

4. Les droites (OM_θ) et T sont-elles sécantes quel que soit le nombre réel θ appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$?

   Cherchons les valeurs de θ pour lesquelles les droites sont parallèles.

   Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$.

   * B et le point de coordonnées $(2,1)$ appartiennent à T donc $\vec{d}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T.
   * $\overrightarrow{OM_\theta}\begin{pmatrix}\cos(\theta)+1\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (OM_θ) (vecteur non nul car $\theta \neq \pi$).
   * (OM_θ) et T sont parallèles si et seulement si

   $$\det\left(\vec{d},\overrightarrow{OM_\theta}\right) = 0$$

   ce qui équivaut successivement à :

   $$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0 & \cos(\theta)+1\\ 1 & \sin(\theta)\end{vmatrix} &= 0\\ \cos(\theta)+1 &= 0\\ \cos(\theta) &= -1\\ \theta &\equiv \pi \mod (2\pi)\end{aligned}$$

   Or $\theta \in]-\pi,\pi[$ donc $\det\left(\vec{d},\overrightarrow{OM_\theta}\right) \neq 0$ et les droites ne sont pas parallèles.

   Remarquons de plus que $M_\pi = O$ et dans ce cas (OM_π) n'est pas une droite mais un point.

   Pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$, T et (OM_θ) sont sécantes.

5. Soit θ un réel non nul appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi[$.
   Déterminez l'affixe du point N appartenant au cercle $\mathcal{C}$ tel que le triangle $OM_\theta N$ soit rectangle en O.

   Déterminons z_N.

   Par construction $\mathcal{C}$ est circonscrit au triangle $OM_\theta N$ donc dire que « $OM_\theta N$ est rectangle en O » équivaut successivement à :
   « $M_\theta N$ est un diamètre de $\mathcal{C}$ »,
   « A est le milieu de $[M_\theta N]$ »,
   « $\overrightarrow{M_\theta A} = \overrightarrow{AN}$ »,
   « $z_A - z_\theta = z_N - z_A$ ».
   Or

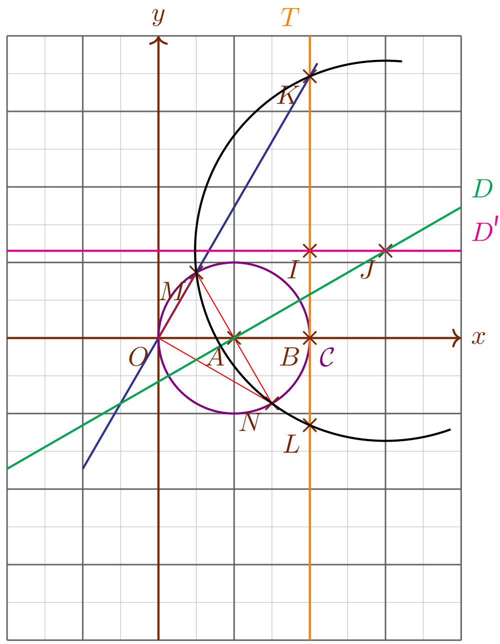
$$\begin{aligned} z_A - z_\theta = z_N - z_A &\iff 1 - [1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta)] = z_N - 1 \\ &\iff z_N = 1 - \cos(\theta) - i\sin(\theta) \end{aligned}$$

   Ainsi

   $OM_\theta N$ est rectangle en O si et seulement si
   $z_N = 1 - \cos(\theta) - i\sin(\theta)$.

Partie B.

$\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. On note M le point $M_{\frac{2\pi}{3}}$.



1. Vérifier que l'affixe du point N défini dans la question A.5 est $z_N = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculons z_N.

$$\begin{aligned} z_N &= 1 - \cos(\theta) - i\sin(\theta) \\ &= 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_N = \tfrac{3}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}.}$$

2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice D du segment $[MN]$.

Déterminons une équation cartésienne de D.

Puisque D est la médiatrice de $[MN]$, $\overrightarrow{MN}$ est normal à D.

Or $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$, *i.e.* $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$D: \; x - \sqrt{3}y + c = 0.$$

Comme de plus $A \in D$ (A étant équidistant de M et N en tant que milieu du segment $[MN]$) on doit avoir

$$x_A - \sqrt{3}y_A + c = 0,$$

d'où $c = -1$.
Finalement

$$\boxed{D: \; x - \sqrt{3}y - 1 = 0.}$$

3. K est le point d'intersection des droites (OM) et T.
   L est le point d'intersection des droites (ON) et T (on admet son existence).
   Déterminez l'affixe du point I milieu du segment $[KL]$.

   * Déterminons les coordonnées de K.
     $K \in (OM)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

     $$z_K = z_O + \lambda(z_M - z_O)$$

     Cette dernière assertion équivaut à :

     $$\begin{aligned} x_K + iy_K &= \lambda\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + i\lambda\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\lambda}{2} + i\lambda\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

     Puisque $K \in T$ nécessairement : $x_K = 2$ et donc $\lambda = 4$. Enfin $y_K = 2\sqrt{3}$.
   * Déterminons les coordonnées de L.
     $L \in (ON)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

     $$z_L = z_O + \lambda(z_N - z_O)$$

     Cette dernière assertion équivaut à :

     $$x_L + iy_L = \frac{3\lambda}{2} - i\lambda\frac{\sqrt{3}}{2}$$

     Puisque $L \in T$ nécessairement : $x_L = 2$ et donc $\lambda = \frac{4}{3}$. Enfin $y_L = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

* $z_I = \frac{1}{2}(z_K + z_L)$ donc

$$\boxed{z_I = 2 + i\frac{2}{3}\sqrt{3}.}$$

4. En déduire une équation cartésienne de la médiatrice D' du segment $[KL]$.

   Déterminons une équation de D'.

   Le repère est orthogonal, D' est perpendiculaire à T et $T: \ x = 2$, D' a une équation de forme $y = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   Comme $I \in D'$

$$\boxed{D': \ y = \frac{2}{3}\sqrt{3}.}$$

5. Démontrer qu'il existe un point J équidistant des points N, M, K et L.
   On déterminera ses coordonnées.

   Justifions l'existence d'un point équidistant à N, M, K, et L.

   Procédons par analyse-synthèse.

   * Si un tel point J existe alors, puisqu'il est équidistant à N et à M nécessairement $J \in D$ et puisqu'il est équidistant à K et à L nécessairement $J \in D'$.
     Par conséquent $y_J = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ puis $x_J - \sqrt{3}\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1 = 0$ et donc $x_J = 3$.
     Ainsi $J\left(3; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$.
   * Il reste à vérifier que J est bien équidistant de, par exemple, N et K.

$$\begin{aligned}
|z_J - z_K| &= \sqrt{(3-2)^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + \frac{16}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{19}{3}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|z_J - z_N| &= \sqrt{\left(3-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{49}{12}}\\ &= \sqrt{\frac{19}{3}}\end{aligned}$$

$$\boxed{J\left(3;\tfrac{3}{2}\sqrt{3}\right) \text{ est équidistant des points } N,\ M,\ K \text{ et } L.}$$

Problème 3 : géométrie dans l'espace.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-1;2;4)$, $B(1;1;3)$, $C(-1;3;3)$ et $D(3;3;5)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   Démontrons que ABC est rectangle en A.

   Le repère étant orthogonal, ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
   Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times0+(-1)\times1+(-1)\times(-1)=0$.
   Finalement

   $$\boxed{ABC \text{ est rectangle en } A.}$$

2. Démontrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (ABC).

   Démontrons ue (BD) est orthogonale aà (ABC).

   * $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est une base de (ABC) puisque $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\neq 0$.
   * $\overrightarrow{BD}\neq\vec{0}$ donc c'est un vecteur directeur de (BD).

* Ainsi (BD) est orthogonale à (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.
* On vérifie aisément $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

Finalement

$$\boxed{(BD) \text{ est orthogonale à } (ABC).}$$

3. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Calculons le volume $\mathscr{V}(ABCD)$ de $ABCD$.

Puisque (BD) est orthogonale au plan (ABC), c'est la hauteur issue de D du tétraèdre.
Par conséquent, en notant $\mathscr{A}(ABC)$ l'aire du triangle ABC :

$$\mathscr{V}(ABCD)=\frac{1}{3}BD\times\mathscr{A}(ABC)$$

Puisque ABC est rectangle en A :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(ABCD)&=\frac{1}{3}BD\times\frac{1}{2}AB\times AC\\&=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}(ABCD)=2.}$$

4. Déterminer une équation du plan (ACD).

Déterminons une équation cartésienne de (ACD).

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\times1-(-1)\times1\\-(0\times1-(-1)\times4)\\0\times1-1\times4\end{pmatrix}$ *i.e.* $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix}$.

Puisque, par construction, $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à (ACD), il existe $d\in\mathbb{R}$ tel qu'une équation cartésienne de (ACD) est

$$x-2y-2z+d=0.$$

Comme de plus $A \in (ACD)$: $-1-2\times2-2\times4+d=0$ et donc nécessairement $d=13$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } (ACD) \text{ est } x-2y-2z+13=0.}$$

5. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ACD).
   Δ est la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{n}$.
   Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite Δ et du plan (ACD).

   Déterminons les coordonnées de H.

   $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ construit au cours réponse précédente est un vecteur directeur de Δ d'où une représentation paramétrique :

$$\Delta : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = 3-2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

   $H \in \Delta$ donc il existe $t_H \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_H = 1+t_H \\ y_H = 1-2t_H \\ z_H = 3-2t_H \end{cases},\ (1).$$

   Comme $H \in (ACD)$: $x_H - 2y_H - 2z_H + 13 = 0$ et en substituant d'après (1) :

$$1+t_H-2(1-2t_H)-2(3-2t_H)+13=0.$$

   Enfin $t_H = -\frac{2}{3}$ et en évaluant dans (1) :

$$\boxed{H\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right).}$$

6. Déterminer l'aire du triangle ACD.

   Calculons l'aire $\mathscr{A}(ACD)$ de ACD.

   Puisque $[BH]$ est la hauteur de $ABCD$ issue de B :

$$\mathscr{A}(ACD) = \frac{\mathscr{V}(ABCD)}{BH}$$

Le repère étant orthonormé, $BH = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{7}{3}-1\right)^2+\left(\frac{13}{3}-3\right)^2} = 2$ et donc :

$$\mathscr{A}(ACD) = \frac{2}{2}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ACD) = 1.}$$

Problème 4 : équation fonctionnelle.

On s'intéresse dans ce problème aux fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété (E) :

$$\text{Pour touts réels } x \text{ et } y,\ f(x+y)\times f(x-y) = (f(x))^2 \times (f(y))^2 \quad (E).$$

Partie A. Existence d'une fonction satisfaisant la propriété (E).

Soit m un nombre réel. On note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = \mathrm{e}^{mx^2}$. Justifier que la fonction f_m vérifie la propriété (E).

Justifions que f_m vérifie (E).

f_m est définie est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f_m(x+y)\times f_m(x-y) &= \mathrm{e}^{m(x+y)^2} \times \mathrm{e}^{m(x-y)^2} \\ &= \mathrm{e}^{mx^2+2mxy+y^2} \times \mathrm{e}^{mx^2-2mxy+y^2} \\ &= \mathrm{e}^{mx^2} \times \mathrm{e}^{2mxy} \times \mathrm{e}^{y^2} \times \mathrm{e}^{mx^2} \times \mathrm{e}^{-2mxy} \times \mathrm{e}^{y^2} \\ &= \mathrm{e}^{2mx^2} \times \mathrm{e}^{2my^2} \times \mathrm{e}^{0} \\ &= \left(\mathrm{e}^{mx^2}\right)^2 \times \left(\mathrm{e}^{my^2}\right)^2 \\ &= (f_m(x))^2 \times (f_m(y))^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{f_m \text{ vérifie } (E).}$$

Partie B. Propriétés des fonctions satisfaisant la propriété (E).

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = x^4$.

   Résolvons l'équation proposée.

$$\begin{aligned} x^4 = x^2 &\Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1) = 0 \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions de l'équation est $\{0; 1; -1\}$.

2. En déduire que, si la fonction f satisfait la propriété (E), alors $f(0) \in \{-1; 0; 1\}$.

3. Démontrer que, si f est une fonction s'annulant en 0 et satisfaisant la propriété (E), alors f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

   Montrons que si f vérifie (E) alors $f(0) \in \{-1; 0; 1\}$.

   Si f vérifie (E) alors, en particulier, pour $x = y = 0$ nous avons : $f(0) \times f(0) = f(0)^2 \times f(0)^2$.
   Autrement dit $f(0)^2 = f(0)^4$ et d'après la question précédente :

   $f(0) \in \{-1; 0; 1\}$.

4. Soit f une fonction satisfaisant la propriété (E).
   Démontrer que, s'il existe un nombre réel non nul a tel que $f(a) = 0$, alors, pour tout entier naturel n, $f\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = 0$.

   On admet que l'on peut en déduire que f est la fonction nulle.

   Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$.

   Démontrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$.

   Notons $\mathscr{P}(n)$: « $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$ et démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   * $f\left(\frac{a}{2^0}\right) = f(a) = 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
  Puisque f vérifie (E) :

$$f\left(\frac{\frac{a}{2^n}}{2}+\frac{\frac{a}{2^n}}{2}\right)\times f\left(\frac{\frac{a}{2^n}}{2}-\frac{\frac{a}{2^n}}{2}\right)=f\left(\frac{\frac{a}{2^n}}{2}\right)^2\times f\left(\frac{\frac{a}{2^n}}{2}\right)^2$$
$$f\left(\frac{a}{2^n}\right)\times f(0)=f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)^4$$

  Et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$0=f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)^4$$
$$0=f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$$

  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\text{si } f(a)=0 \text{ alors : } \forall n\in\mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^n}\right)=0.}$$

5. On suppose maintenant que f vérifie la propriété (E) et que f n'est pas la fonction nulle.
   Déduire de la question précédente que la fonction f est soit strictement positive sur $\mathbb{R}$, soit strictement négative sur $\mathbb{R}$.

   Raisonnons par l'absurde.

   Supposons que f n'est ni strictement négative ni strictement positive.

   S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a)=0$ alors, d'après la question précédente f est la fonction nulle ce qui est impossible.

   Sinon il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha<\beta$ et $f(\alpha)f(\beta)<0$. Puisque f est supposée continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists a \in]\alpha,\beta[,\ f(a)=0$.
   Dans ce cas, d'après la question précédente $f=0$ ce qui est impossible.

   Dans les deux nous obtenons une contradiction.

f est soit strictement positive, soit strictement négative.

Partie C. Identification des fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la propriété (E).

Soit f une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (E).

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln[f(x)]$.

1. Démontrer, à l'aide de la question 2. de la partie B, que $g(0) = 0$.

   Calculons $g(0)$.

   D'après la question B.2), $f(0) \in \{-1; 1; 0\}$ or f est strictement positive donc $f(0) = 1$. Enfin $\ln \circ f(0) = 0$.

   $$g(0) = 0.$$

2. Vérifier que, pour tous réels x et y : $g(x+y) + g(x-y) = 2\,(g(x) + g(y))$.

   Soient x et y des réels.

   Démontrons que $g(x+y) + g(x-y) = 2\,(g(x) + g(y))$.

   Puisque f est strictement positive et vérifie (E) :

   $$\ln\left(f(x+y) \times f(x-y)\right) = \ln\left((f(x))^2 \times (f(y))^2\right)$$

   Nous en déduisons :

   $$\ln \circ f(x+y) + \ln \circ f(x-y) = 2\ln \circ f(x) + 2\ln \circ f(y)$$

   Ainsi

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) + g(x-y) = 2\,(g(x) + g(y)).$$

3. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence et de la question précédente, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g(n) = g(1) \times n^2$.

   Démontrons par une récurrence double que l'assertion $\mathscr{Q}(n)$: « $g(n) = n^g(1)$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) $g(0) = 0$ d'après C.1. donc $g(0) = g(1) \times 0^2$ est vraie.
Clairement $g(1) = g(1) \times 1^2$.
Ainsi $\mathscr{Q}(0)$ et $\mathscr{Q}(1)$ sont vraies.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathscr{Q}(n-1)$ et $\mathscr{Q}(n)$ sont vraies.
Démontrons que $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.
D'après C.2.

$$g(n+1) + g(n-1) = 2\left(g(n) + g(1)\right)$$

D'où

$$g(n+1) = 2g(n) + 2g(1) - g(n-1)$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} g(n+1) &= 2n^2 g(1) + 2g(1) - (n-1)^2 g(1) \\ &= \left(2n^2 + 2 - (n-1)^2\right) g(1) \\ &= \left(n^2 + 2n + 1\right) g(1) \\ &= (n+1)^2 g(1) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.

(c) Nous avons démontré par une récurrence double que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ g(n) = n^2 g(1).}$$

4. **On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $g(nx) = n^2 g(x)$.**
Démontrer que, pour tout entier naturel p non nul : $g\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{g(1)}{p^2}$.
En déduire que, pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel p non nul : $g\left(\dfrac{n}{p}\right) = \dfrac{n^2}{p^2} g(1)$.

* Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que $g\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{g(1)}{p^2}$.

D'après l'énoncé (pour $x = \frac{1}{p}$ et $p = n$) on a : $g\left(p\frac{1}{p}\right) = p^2 g\left(\frac{1}{p}\right)$.

Donc

$$g\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{g(1)}{p^2}.$$

* Soit $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{n}{p}\right) &= n^2 g\left(\frac{1}{p}\right) \\ &= n^2 \frac{1}{p^2} g(1) \end{aligned}$$

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ g\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{n^2}{p^2} g(1).$$

5. **On admet que, pour tout nombre réel x, $g(x) = g(1) \times x^2$.**
En déduire l'expression des fonctions f définies, continues et strictement positives sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété (E).

Déterminons l'expression de f.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp \circ g(x) \\ &= \exp\left(g(1)x^2\right) \\ &= \end{aligned}$$

Les fonctions f définies, continues et strictement positives sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété (E) sont celles de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x^2}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.