Le sujet est composé :

- *des questions posées au candidat (pages 1 à 4) ;*
- *du dossier sur lequel portent ces questions (pages 5 à 14).*

Partie 1 : aires

Les questions sur ce thème se rapportent à la partie 1 du dossier (pages 5 à 10).

La notion d'aire au collège

I - Analyse de ressources

Un enseignant propose l'exercice de l'annexe 3 en travail de groupes à une classe de sixième.

1. Proposer une figure de même aire et de périmètre plus grand que le modèle, puis une figure de même périmètre et d'aire plus grande que le modèle.
2. Quels apprentissages peut viser l'enseignant en proposant cette situation ?
3. Donner deux arguments justifiant l'intérêt pédagogique d'organiser un travail en groupes autour de cette situation.
4. À partir des figures proposées en annexe 4, quelle question pourrait être posée pour réinvestir l'un des apprentissages de l'exercice de l'annexe 3 ?

II - Analyse d'une production d'élève

Un enseignant propose l'exercice de l'annexe 5 à une classe de troisième.

1. Analyser en termes de réussites et d'erreurs la solution proposée par l'élève de l'annexe 5 bis.
2. En prenant appui sur la démarche de cet élève, rédiger une correction de cet exercice telle qu'elle pourrait être donnée à copier par les élèves dans leur cahier.

La notion d'aire au lycée

III - Analyse d'erreur d'élève

Le QCM de l'annexe 7 est proposé à des élèves de terminale *spécialité mathématiques*.

1. Écrire les énoncés mathématiques sur le calcul intégral (définition, propriété) que doivent mobiliser les élèves pour répondre correctement.
2. Dans un QCM, les réponses fausses proposées, appelées *distracteurs*, correspondent en général à des erreurs courantes. Indiquer la bonne réponse et analyser les distracteurs de l'annexe 7.
3. Une majorité d'élèves a répondu « d. » à la question posée. Proposer un exercice qui pourrait permettre de remédier à l'erreur commise.

IV - Démonstration d'un théorème du cours

Proposer une démonstration du théorème mentionné dans l'annexe 6, telle qu'elle pourrait être rédigée devant une classe de terminale *spécialité mathématiques*. On se placera dans le cas d'une fonction positive, continue et croissante sur l'intervalle d'étude.

V - Mobilisation de compétences mathématiques

Le problème « d'Archimède » (annexe 8) est proposé à une classe de terminale *spécialité mathématiques*.

1. Analyser la production de l'élève (annexe 8 bis) au regard des compétences *raisonner* et *calculer*.
2. L'élève a choisi l'axe de symétrie de la parabole comme axe des ordonnées du repère. Quel autre repère aurait-il pu également choisir pour faciliter les calculs ? Rédiger une correction de l'exercice dans ce nouveau repère.

VI – Algorithmique et programmation

1. Pour utiliser la méthode de Monte-Carlo (annexe 9) en classe terminale *spécialité mathématiques*, un enseignant hésite entre les deux situations de l'annexe 10. Quelle situation paraît la plus pertinente à ce niveau ?
2. Expliquer le résultat obtenu et analyser les erreurs commises par l'élève (annexe 11 bis) dans le programme qu'il produit en réponse à l'exercice d'application de la méthode de Monte Carlo donné en annexe 11.
3. Proposer une correction de ce programme.
4. Que représente, dans un autre domaine des mathématiques, le résultat obtenu à l'exercice de l'annexe 11 ?

Partie 2 : initiation au raisonnement

Les questions sur ce thème se rapportent à la partie 2 du dossier (pages 11 à 14).

VII - Éléments d'une séquence d'enseignement

1. Les figures de l'annexe 13, numérotées 1, 2 et 3 ont été obtenues en codant des quadrilatères ABCD pour illustrer les propriétés d'un parallélogramme.
   a. Énoncer la propriété illustrée par chacune de ces figures, sous la forme : « Si un quadrilatère est un parallélogramme alors … ».
   b. Quand dit-on qu'une propriété vérifiée par un quadrilatère *caractérise* un parallélogramme ? On parle alors de *propriété caractéristique*.
   c. Donner une propriété vérifiée par tout parallélogramme qui pourrait convaincre des élèves que toutes les propriétés ne sont pas caractéristiques.
   d. La propriété codée par la figure 3 est-elle caractéristique d'un parallélogramme ? Justifier.
   e. Quels peuvent être les avantages et les inconvénients de présenter une propriété à l'aide d'une figure codée plutôt qu'avec son énoncé ?

2. Dans l'extrait de manuel « Méthode 2 » de l'annexe 13, sont décrites des méthodes pour « tracer un parallélogramme connaissant trois de ses sommets ».
   a. Donner les étapes d'un autre programme de construction permettant d'obtenir un parallélogramme à partir de trois points et à l'aide de ses diagonales. Expliciter la propriété qui permet de justifier cette construction.
   b. En appliquant ce programme de construction, un élève pense que cette méthode ne convient pas parce qu'il obtient un rectangle. Quelles explications peuvent lui être apportées ?

VIII – Classification d'exercices

Pour chacun des quatre exercices donnés dans l'annexe 14, en indiquant sommairement la démarche qui peut être envisagée pour répondre à la question posée préciser le type de raisonnement mis en œuvre.

La résolution de ces exercices n'est pas demandée.

IX - Analyse de productions d'élèves

L'annexe 15 bis donne les réponses d'élèves de plusieurs classes à un même exercice donné en annexe 15.

1. Élève 1
   a. Expliquer l'intérêt de la multiplication par 4.
   b. Rédiger un raisonnement justifiant l'affirmation « donc logiquement, x doit finir par 2 » tel qu'il pourrait figurer dans les cahiers des élèves d'une classe de troisième.
   c. Proposer une autre rédaction de ce raisonnement tel qu'il pourrait figurer dans les cahiers des élèves d'une classe de terminale option « mathématiques expertes ».

2. Élève 2
   a. Comment aider l'élève à trouver ce qui ne convient pas dans son programme ?
   b. Réécrire le programme proposé par l'élève pour qu'il donne les solutions de l'équation $5{,}25\,x + 2{,}5\,y = 338$.

3. Élève 3
   a. Analyser l'erreur de l'élève.
   b. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation diophantienne $21\,x + 10\,y = 1352$.

X - Analyse de ressources

1. Exercice de l'annexe 16
   a. Quel type de démarche cet exercice permet-il de mettre en défaut ?
   b. Quel travail sur les quantificateurs peut être conduit à partir de cet exercice ?
   c. Donner des arguments en faveur d'un temps de travail en groupes pour traiter cet exercice en classe.

2. Exercice de l'annexe 17
   a. Rappeler les différentes étapes d'un raisonnement par récurrence.
   b. Comment pourrait-on expliquer à une classe de Terminale la mise en défaut du raisonnement pour démontrer l'hérédité lorsque $k = 1$?.

Dossier : Partie 1

Annexe 1 : programme de mathématiques du cycle 3 (*BO n°31 du 30 juillet 2020, extrait*)

Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle
Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs

Longueur et périmètre

Comparer des périmètres avec ou sans recours à la mesure (par exemple en utilisant une ficelle, ou en reportant les longueurs des côtés d'un polygone sur un segment de droite avec un compas).

- Notion de longueur : cas particulier du périmètre.
- Unités relatives aux longueurs : relations entre les unités de longueur et les unités de numération.

Calculer le périmètre d'un polygone en ajoutant les longueurs de ses côtés.

Calculer le périmètre d'un carré et d'un rectangle, la longueur d'un cercle, en utilisant une formule.

- Formule du périmètre d'un carré, d'un rectangle.
- Formule de la longueur d'un cercle.

Aires

Comparer des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure, par superposition ou par découpage et recollement.

Différencier périmètre et aire d'une figure.

Estimer la mesure d'une aire et l'exprimer dans une unité adaptée.

Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule.

- Unités usuelles d'aire et leurs relations : multiples et sous-multiples du m².
- Formules de l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque.

Annexe 2 : les compétences mathématiques au lycée (*Éduscol, novembre 2013, extrait*)

Calculer

Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel).

Mettre en œuvre des algorithmes simples.

Exercer l'intelligence du calcul : organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations, effectuer des simplifications.

Contrôler les calculs (au moyen d'ordres de grandeur, de considérations de signe ou d'encadrement).

Raisonner

Utiliser les notions de la logique élémentaire (conditions nécessaires ou suffisantes, équivalences, connecteurs) pour bâtir un raisonnement.

Différencier le statut des énoncés mis en jeu : définition, propriété, théorème démontré, théorème admis…

Utiliser différents types de raisonnement (par analyse et synthèse, par équivalence, par disjonction de cas, par l'absurde, par contraposée, par récurrence…).

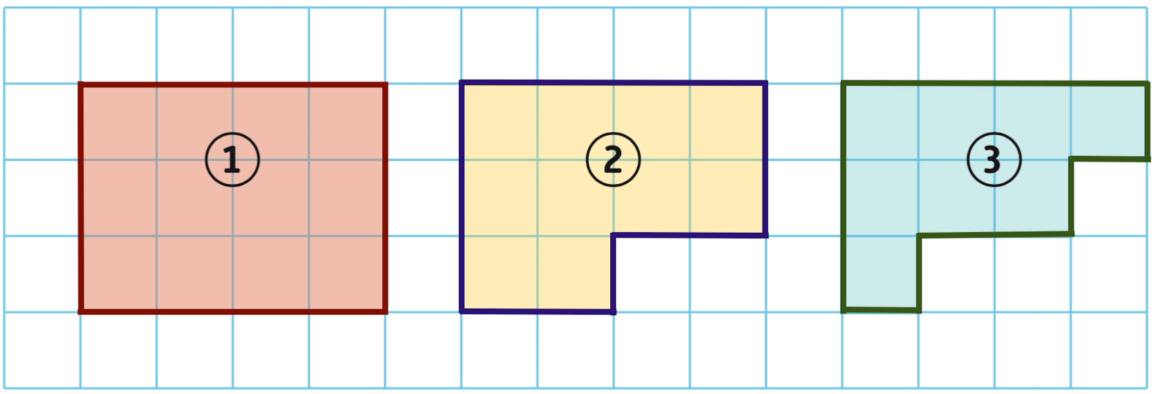
Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision.

Annexe 3 : exercice sur les notions d'aire et de périmètre (*d'après l'IREM des Pays de la Loire*)

Inventer des figures à partir de la figure présente au centre du tableau et les positionner dans les cases correspondantes. Chercher à compléter toutes les cases.

	Le périmètre est plus petit que celui du modèle.	Le périmètre est égal à celui du modèle.	Le périmètre est plus grand que celui du modèle.
L'aire est plus petite que celle du modèle.			
L'aire est égale à celle du modèle.			
L'aire est plus grande que celle du modèle.			

Annexe 4 : figures (*extrait du manuel Delta Mathématiques 6*[e]*, Magnard*)

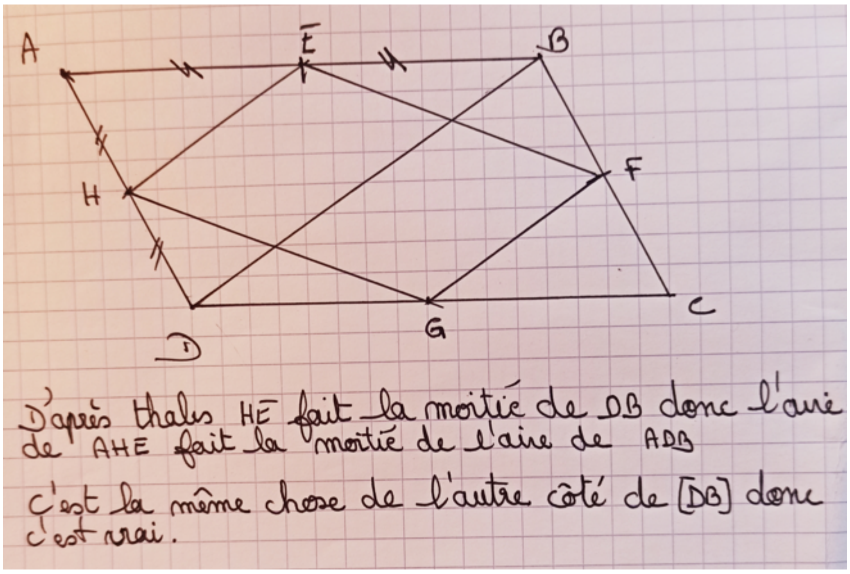


Annexe 5 : exercice

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

On considère un quadrilatère ABCD et les points E, F, G et H les milieux respectifs de ses côtés. L'aire du quadrilatère EFGH est égale à la moitié de l'aire du quadrilatère ABCD.

Annexe 5 bis : production d'un élève



Annexe 6 : programme de la spécialité mathématiques de terminale (*extrait*)

- **Calcul intégral**

La définition de l'intégrale s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège. Les élèves développent une vision graphique de l'intégrale et maîtrisent le calcul approché, en liaison avec la méthode des rectangles et le calcul exact par les primitives.

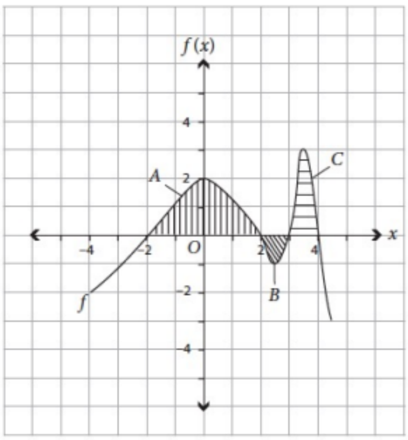
On met en regard les écritures $\int_a^b f(x)dx$ et $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$.

Contenus

– Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a,b]$, comme aire sous la courbe représentative de f. Notation $\int_a^b f(x)dx$.

– Théorème : si f est une fonction continue positive sur $[a,b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a,b]$ par $F_a(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Annexe 7 : QCM (*extrait de l'évaluation TIMMS 2008*)



Pour les aires entre le graphe de *f* et l'axe des abscisses, l'aire de A est 4,8 unités, l'aire de B est de 0,8 unités et l'aire de C est de 2 unités.

Quelle est la valeur de $\int_{-2}^{4} f(x)dx$?

a. 5,6
b. 6,0
c. 6,8
d. 7,6

Annexe 8 : problème des arches paraboliques

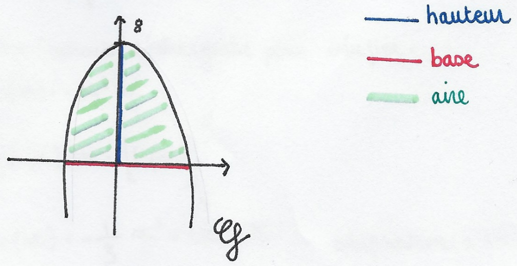
Archimède affirmait que l'aire de la surface sous une arche parabolique est égale aux deux tiers de la base multipliée par la hauteur de l'arche.

Qu'en pensez-vous ?

Annexe 8 bis : production d'un élève

• Afin de representer le problème d'Archimède, nous prenons une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est semblable à une arche parabolique.

$f(x) = -x^2 + 8$



• On calcule Δ afin de trouver les racines :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= -4 \times (-1) \times 8$

$= 32$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\sqrt{32}}{-2} = 2\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{32}}{-2} = -2\sqrt{2}$

• La base est donc $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

• Selon archimède : aire $= \frac{2}{3}$ base $\times$ hauteur

donc $\frac{2}{3}$ base $\times$ hauteur $= \frac{2}{3} 4\sqrt{2} \times 8 = \dfrac{64\sqrt{2}}{3}$

• On calcul l'intégrale pour vérifier l'affirmation d'Archimède

$f(x) = -x^2 + 8$

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}$$

$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 8x + k$ verification : $F'(x) = -\frac{3}{3}x^2 + 8 = -x^2 + 8 = f(x)$

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} f(x)\,dx = F(2\sqrt{2}) - F(-2\sqrt{2}) = -\frac{1}{3}(2\sqrt{2})^3 + 8(2\sqrt{2}) - \left(-\frac{1}{3}(-2\sqrt{2})^3 + 8(-2\sqrt{2})\right)$$

$$= \frac{64\sqrt{2}}{3}$$

Conclusion : nous rettombons bien sur le même résultat, donc Archimede avait raison : l'aire de la surface d'une arche parabolique est égale au deux tiers de la base fois la hauteur.

Annexe 9 : la méthode de Monte-Carlo (*Éduscol, Suites, exponentielle, probabilités, page 21)*

Une méthode originale

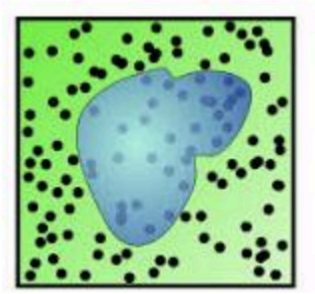
La méthode de Monte-Carlo est une méthode originale qui s'appuie sur le hasard pour estimer une aire.

Stanisław Ulam et John von Neumann l'appelèrent ainsi, en référence aux jeux de hasard dans les casinos, au cours du projet Manhattan qui produisit la première bombe atomique pendant la Seconde Guerre mondiale. Une surface inconnue peut être estimée de la façon suivante :

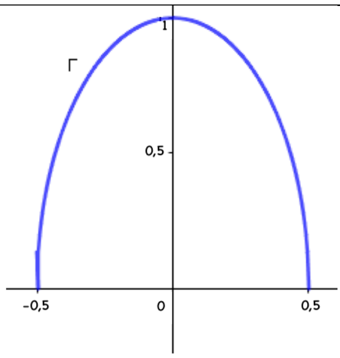
On l'englobe dans un domaine plus large dont l'aire est facile à calculer, un rectangle par exemple.

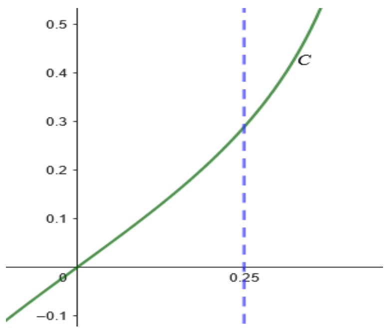
On génère des points au hasard dans ce rectangle.

On estime l'aire de la surface inconnue par la proportion de points à l'intérieur de la surface multipliée par l'aire du rectangle.



Annexe 10 : calculs d'aire

<table>
<tr><th>Situation n°1</th><th>Situation n°2</th></tr>
<tr><td>


La courbe Γ représente la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ par $f(x)=\sqrt{1-4x^2}$.
Déterminer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe Γ et l'axe des abscisses.
</td><td>


La courbe C représente la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ par $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$.
Déterminer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=\frac{1}{4}$
</td></tr>
</table>

Annexe 11 : application de la méthode de Monte-Carlo

Écrire un algorithme qui renvoie une approximation de l'aire de la portion du plan comprise entre :

- la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

- l'axe des ordonnées ;
- l'axe des abscisses ;
- la droite d'équation $x=1$.

Annexe 11 bis : production d’un élève

```
from math import*
from random import*

def f(x):
    y=exp(-x*x/2)/sqrt(2*pi)
    return y

def aire(n):
    compteur=0
    for k in range(n):
        x=random()
        y=random()
    if y<f(x):
        compteur=compteur+1
    return compteur
```

On obtient :

```
> aire(1000000)
1
```

Dossier : Partie 2

Annexe 12 : raisonnement et démonstration (*Éduscol, août 2019, extrait*)

Du collège à la seconde

En classe de seconde, l'enseignement des mathématiques doit, en tenant compte de la diversité du public et de l'hétérogénéité des niveaux, viser trois objectifs :

- poursuivre la formation du citoyen commencée dans le cadre du socle commun ;
- assurer une solide formation aux futurs scientifiques sans décourager les autres ;
- éclairer les élèves sur l'intérêt de faire des mathématiques en première pour servir un grand nombre de projets d'études.

Le travail sur le raisonnement et la démonstration en seconde s'appuie sur celui effectué au cycle 4, tel qu'il est décrit dans le préambule du programme de mathématiques : « La formation au raisonnement et l'initiation à la démonstration sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées […]. Le programme du cycle 4 permet d'initier l'élève à différents types de raisonnement, le raisonnement déductif, mais aussi le raisonnement par disjonction de cas ou par l'absurde. La démonstration, forme d'argumentation propre aux mathématiques, vient compléter celles développées dans d'autres disciplines et contribue fortement à la formation de la personne et du citoyen (domaine 3 du socle) ».

(…)

Raisonner pour chercher, raisonner pour démontrer

Dans une phase de recherche, le raisonnement inclut des formes heuristiques telles que l'essai-erreur, la recherche de conjectures par :

- raisonnement inductif : conjecturer une proposition générale à partir de la vérification de cas particuliers ;
- raisonnement abductif : sachant que A implique B et voulant démontrer B, on peut être amené à conjecturer A.

Mentionnons aussi la preuve sur un exemple générique (démonstration sur un cas susceptible d'être adaptée au cas général), la « preuve sans mots » (justification sur une figure peu ou non commentée).

Dans une phase de démonstration, on utilise le raisonnement déductif qui peut se présenter sous diverses formes : raisonnement par implication, par équivalence, par l'absurde, par disjonction de cas, etc. La mise en forme de la démonstration s'appuie sur les compétences « raisonner » et « communiquer ».

Le raisonnement intervient ainsi dans ces activités diverses (chercher et conjecturer, affirmer et démontrer) dont la valeur et l'intérêt sont à mettre en évidence. Il importe aussi que l'élève apprenne à les distinguer clairement : une conjecture n'est pas un théorème, un raisonnement inductif n'est pas déductif, A implique B ne signifie pas B implique A (…).

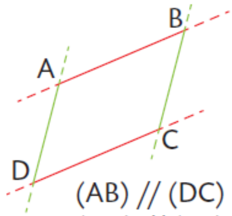
Ainsi, l'élève doit être encouragé à chercher, à juger avec lucidité les résultats qu'il obtient, à reconnaître comme tel un argument incomplet, à éviter les affirmations non étayées.

Annexe 13 : extraits d’un manuel (*Maths Monde, cycle 4, édition Didier, pages 293 et 294*)

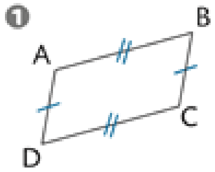
Parallélogramme

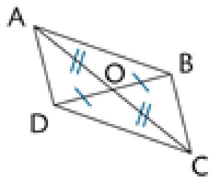
DÉFINITION

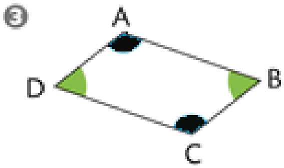
Un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles.



(AB) // (DC)
(AD) // (BC)

1 

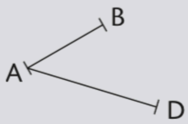
2 

3 

Méthode 2

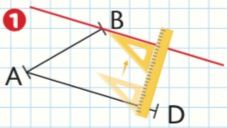
Tracer un parallélogramme connaissant trois de ses sommets

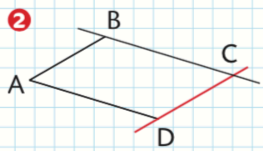
ÉNONCÉ ABCD est un parallélogramme, compléter la figure.



SOLUTION

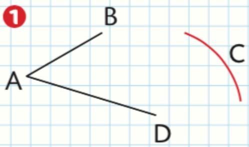
Avec l’équerre et la règle non graduée ou la réquerre (d’après la définition)

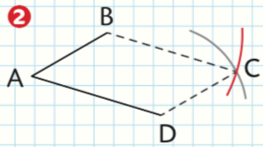
1 

2 

1 On trace la droite parallèle à (AD) passant par B. 2 Puis, on trace la droite parallèle à (AB) qui passe par D.
Ces droites se coupent en C.

Avec le compas et la règle non graduée (d’après la propriété sur les longueurs des côtés opposés)

1 

2 

1 On trace un arc de cercle de centre D et de rayon AB, 2 puis, l’arc de cercle de centre B et de rayon AD. Les arcs se coupent en C.

Annexe 14 : énoncés d'exercices

Exercice 1

Soient a et b deux réels positifs.

A-t-on $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$?

Exercice 2

Soient a et b deux réels positifs.

Le produit des racines carrées de a et b est-il égal à la racine carrée du produit de a et b ?

Exercice 3 :

n désigne un entier relatif. On considère le nombre A = $n\,(n^2+5)$.

Démontrer que A est divisible par 3.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul.

Démontrer que $(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

Annexe 15 : exercice

Énoncé : Un pépiniériste propose à la vente des plants de mufliers à 5,25 € le plant et des plants de jacinthes à 2,50 € le plant. À la fin de la journée, sa recette est de 338 €.

Déterminer le nombre total de plants vendus.

Annexe 15 bis : productions d'élèves

Élève 1 (classe de troisième)

J'appelle x le nombres de mufliers et y le nombre de jacinthes vendus.

Et en multipliant par 4 ça donne 21 x +10 y = 1352.
Donc logiquement, x doit finir par 2.

J'ai essayé et j'ai trouvé que le pépiniériste a vendu 42 mufliers et 47 jacinthes.

Élève 2 (classe de seconde)

J'ai écrit le programme suivant avec x le nombre de mufliers et y le nombre de jacinthes

```
x=0
y=0
while 5.25*x+2.5*y != 338 :
    x=x+1
    y=y+1
print (x,y)
```

Je ne trouve pas de solution ce qui n'est pas logique d'après l'énoncé.

Élève 3 (option mathématiques expertes de terminale)

Je note x le nombre de mufliers et y le nombre de jacinthes. Je dois donc résoudre l'équation diophantienne 5,25 x + 2,5 y = 338.

J'écris l'algorithme d'Euclide : 5,25= 2*2,5+0,25

2,5 = 0,25 * 10 + 0

J'essaie de résoudre l'équation diophantienne mais je n'arrive pas à appliquer l'égalité de Bézout parce que je n'ai pas un 1 dans l'algorithme d'Euclide.

Annexe 16 : exercice

Préciser si la proposition suivante est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.

Proposition : pour tout entier n, $n^2 - n + 41$ est un nombre premier.

Annexe 17 : exercice (Barbazo Terminale spécialité mathématiques, Hachette, page 27)

On considère le raisonnement suivant.

On note $P(n)$ la propriété suivante : « Si une urne contient n boules, alors les n boules sont de la même couleur. »

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n non nul.

- Pour $n = 1$: $P(1)$ est vraie car il n'y a qu'une boule.
- Supposons que, pour un entier naturel non nul k fixé, $P(k)$ est vraie. Prenons une urne qui contient $(k + 1)$ boules. On enlève une boule ; il en reste alors k qui, par hypothèse de récurrence, sont de la même couleur. On enlève une autre boule et on remet la première : il y a encore k boules dans l'urne qui sont donc, par hypothèse de récurrence, toutes de la même couleur. La première boule enlevée a donc la même couleur que les autres. Donc les $(k + 1)$ boules de l'urne sont de même couleur ; donc $P(k + 1)$ est vraie.
- Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Quelle erreur de raisonnement commet-on ?