Capes de mathématique 2023 épreuve 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Problème n° 1 : vrai-faux.

I Analyse.

1. L'assertion est fausse.

Pas de démonstration possible : il s'agit de la définition de l'imparité.
La condition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(-x).$$

est suffisante pour affirmer que f n'est pas paire mais elle n'est pas nécessaire.
En effet, si f n'est pas paire alors

$$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(-x).$$

2. L'assertion est vraie.

Si $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution.

Supposons $f(a) \neq a$ et $f(b) \neq b$.
Puisque $f(a) \in [a;b]$ et $f(a) \neq a$ alors $f(a) - a > 0$. De même $f(b) - b < 0$.
$x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[a;b]$ et $f(a) - a > 0$ et $f(b) - b < 0$ il existe $x_0 \in]a;b[$ tel que $f(x_0) - x_0 = 0$.

Dans tous les cas l'équation $f(x) = x$ admet une solution.

3. L'affirmation est fausse.

Si $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x-1 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \right.$

Comme $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2}$ et $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ on a bien $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
Et pourtant $f(0) \leqslant g(0)$.

4. L'affirmation est fausse.

$\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}x = 0$ et pourtant $x \mapsto x$ n'est pas identiquement nulle.

5. L'affirmation est fausse.

La fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$ est solution de l'équation différentielle.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = k\exp(2x) + 1$.
Nous aurions alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + 1 &= k\mathrm{e}^{2x} + 1 \\ 1 &= k\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

ce qui est impossible.
Nous avons démontré par l'absurde que g, qui est bien solution de l'équation différentielle, n'est pas une fonction de la forme $x \mapsto k\exp(2x) + 1$.
Il manque des solutions de l'équation différentielle dans l'énoncé.

6. L'affirmation est fausse.

La négation, par exemple, de « suite majorée » n'est pas « suite minorée ».
En effet dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée c'est dire

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$$

or sa négation est

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M,$$

alors que dire que la suite est minorée par M s'exprime par

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > M.$$

La négation de la première phrase est « il existe une suite réelle majorée et divergente ».

7. L'affirmation est fausse.

On reconnaît dans u_n la somme des $n+1$ premiers termes dune suite géométrique de terme initial 1 et de raison $-\frac{1}{7}$ donc

$$u_n = \frac{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{7}\right)}.$$

Puisque $-\frac{1}{7} \in]-1;1[$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n = 0,$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{7}} = \frac{7}{8} < 1.$$

8. L'affirmation est fausse.

La variable u est censée représentée la distance parcourue lors de la semaine. u devrait augmenter lors de l'exécution de la boucle et ce n'est pas le cas. Il manque une incrémentation de u.

* À la fin de la semaine 2 la distance parcourue en km est de $40+(40+5)+(40+5+5) = 135$.
* Par conséquent l'instruction seuil(134) devrait renvoyer 2.
  Or

	n	k	u	S	S<n
1	134				
2	134	0			
3	134	0	40		
4	134	0	40	40	
5	134	0	40	40	1
6	134	1	40	40	1
7	134	1	40	85	1
5	134	1	40	85	1
6	134	2	40	85	1
7	134	2	40	130	1
5	134	2	40	130	1
6	134	3	40	130	1
7	134	3	40	170	1
5	134	3	40	170	0
8					

donc le programme ne renvoie pas 2 comme attendu.

II Géométrie.

9. L'affirmation est fausse.

L'assertion proposée n'est pas la contraposée mais la réciproque de la première assertion.

10. L'affirmation est vraie.

Par bilinéarité du produit scalaire :

$$(x+y|x-y) = (x|x) - (x|y) + (y|x) - (y|y)$$

Puisque $||.||$ est associée à $(.|.)$

$$(x+y|x-y) = ||x||^2 - (x|y) + (y|x) - ||y||^2$$

Par symétrie du produit scalaire :

$$(x+y|x-y) = ||x||^2 - (x|y) + (x|y) - ||y||^2$$

Comme $||x|| = ||y||$:

$$(x+y|x-y) = 0$$

11. L'affirmation est fausse.

Donnons un contre-exemple.
Soit $z \in P \setminus \{0\}$.
Il existe $x \in P \setminus \{0\}$ qui appartienne à l'orthogonal de z.
Notons enfin $y = -x$.
Par construction $(x|z) = 0$ et $(y|z) = 0$ donc $(x|z) = (y|z)$ et pourtant $x \neq y$.

12. L'affirmation est fausse.

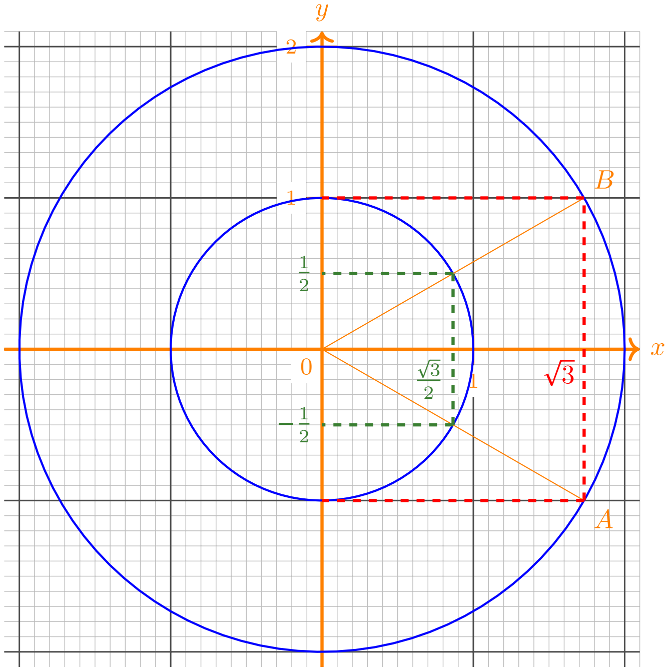
Notons $d : x + y = 3$.
$B \in d$ car $3 + 0 = 3$.
B appartient à la médiatrice de $[AC]$ si et seulement si $AB = BC$.
Or, le repère étant orthonormé, $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{[3-(-4)]^2 + (0-1)^2} = 5\sqrt{2}$ et, de même, $BC = 2\sqrt{5}$ donc B n'appartient pas à la médiatrice de $[AC]$.
Enfin nous en déduisons que d n'est pas la médiatrice de $[AC]$.

13. L'affirmation est fausse.

Traduisons en géométrie affine le problème : on recherche les points M d'affixe z qui sont équidistants des points A, d'affixe 2, et B, d'affixe -1.
L'ensemble des points recherchés forment la médiatrice de $[AB]$.
Il n'y a pas unicité de la solution au problème.

14. L'affirmation est vraie.

Il suffit d'un schéma pour s'en convaincre et vraisemblablement justifier la réponse (théorème de Thalès et valeurs remarquables de sinus et cosinus).



$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) \mod (2\pi)$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} &= \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \\
&= \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)} \\
&= \frac{\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3}i - 1}{\sqrt{3}^2 + 1} \mod (2\pi) \\
&= \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) &\equiv \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mod (2\pi)\\ &\equiv \arg\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right) \mod (2\pi)\\ &\equiv \frac{\pi}{3} \mod (2\pi)\end{aligned}$$

15. L'affirmation est fausse.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P et $\vec{d}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.
P et D sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{d}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires (nous sommes dans un espace de dimension 3).
$\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix} = 4 \neq 0$ donc $\vec{d}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent P et D ne sont pas perpendiculaires.

III Matrices.

16. L'affirmation est vraie.

Le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ est $\chi_A(X) = \det(A - XI_2) = \begin{vmatrix}-X & 1\\ 1 & -X\end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
Le polynôme caractéristique étant un polynôme annulateur de A, nous pouvons affirmer que nous avons trouver un polynôme annulateur scindé simple de A donc A est diagonalisable.
Les valeurs propres de A étant non nulles (1 et -1) A est inversible.

17. L'affirmation est vraie.

Raisonnons par l'absurde en supposant que : $AB = 0$ et A et B sont inversibles.
Nous en déduisons

$$\begin{aligned} A^{-1}AB &= A^{-1}0 \\ B &= 0 \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que B est inversible.
On a démontré par l'absurde que si $AB = 0$ alors A ou B n'est pas inversible.

IV Pourcentages.

18. L'affirmation est fausse.

Les augmentations de 12 %, 16 % et 7 % correspondent à des coefficients multiplicateurs respectivement de $1,12$, $1,16$ et $1,07$.
Le coefficient multiplicateur global pour ces trois évolutions est donc de $1,12 \times 1,16 \times 1,07 = 1,390144$.
Autrement il s'agit d'une augmentation globalement d'approximativement 39 %.

19. L'affirmation est fausse.

Donnons un contre-exemple.
Semaine 1.

	Armelle	Boris
Nombre d'exercices	1000	10
Nombre de réussite	500	9

Semaine 2.

	Armelle	Boris
Nombre d'exercices	10	1000
Nombre de réussite	2	400

La proportion de réussite d'Armelle est $\frac{500+2}{1000+10}$ et celle de Boris $\frac{9+400}{10+1000}$.

V Arithmétique.

20. L'affirmation est vraie.

$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$.
Le produit de trois entiers consécutif contient forcément un nombre pair donc ce produit est pair.

21. L'affirmation est fausse.

Donnons un contre-exemple.
$6^2 \equiv 9\ [27]$.
$6 \not\equiv 3\ [27]$ et $6 \not\equiv -3\ [27]$.

VI Dénombrement.

22. L'affirmation est fausse.

Le nombre de parties d'un ensemble fini E de cardinal $|E| = 10$ est $2^{|E|} = 2^{10} = 1024$.

23.

VII Probabilités.

24. L'affirmation est vraie.

Supposons, par exemple, que le numéro choisi est le 6.
Il faut donc calculer la probabilité de l'événement A : « le 6 n'est pas obtenu lors des deux premiers lancers ».
Modélisons l'expérience avec $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, pour la tribu (nous sommes dans le cas fini) $\mathscr{P}(\Omega)$ convient et la loi est la loi uniforme sur Ω (puisque les lancers sont indépendants et que chacun est régi par l'équiprobabilité).
A est formé des éléments de $[\![1, 5]\!]^2$ donc $|A| = |[\![1, 5]\!]|^2 = 5^2$.
De même $|\Omega| = 6^2$.

Puisque la loi est celle de l'équiprobabilité :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|}\\ &= \frac{5^2}{6^2}\end{aligned}$$

25. L'affirmation est vraie.

$$\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}(1-\mathbb{P}(A))\,(1-\mathbb{P}(B)) &= 1- \ \mathbb{P}(A \cup B)\\ 1-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B) &= 1-(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B))\\ 1-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B) &= 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\cap B)\\ \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

Problème n° 2 : équations fonctionnelles.

I Quelques résultats classiques.

1. (a) f est dérivable en a si et seulement si

$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

(b) Démontrons que f, dérivable en a, admet un développement limité d'ordre 1 en a.

Si $x = a$ l'égalité est triviale sinon avec la notation de l'énoncé, pour tout x dans un voisinage de a et $x \neq a$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = \varepsilon(x)$$

ce qui équivaut successivement à :

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = (x-a)\varepsilon(x)$$
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$$

Et comme f est dérivable en a $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

f admet un développement limité d'ordre 1 en a.

(c) i. Supposons f dérivable en a et

démontrons que f est continue en a.

D'après la question précédente, pour x dans un voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
En passant à la limite dans la précédente égalité :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a).$$

Autrement dit

f est continue en a.

ii. La fonction valeur absolue est continue sans être dérivable en 0.

(d) Supposons f et g dérivables en a et

démontrons que fg est dérivable en a.

D'après 1.(b)

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$$

et

$$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)\varepsilon_2(x)$$

donc

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)g(x)\\ &= \left(f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varepsilon_1(x)\right)\\ &\quad\times\left(g(a)+(x-a)g'(a)+(x-a)\varepsilon_2(x)\right)\\ &= f(a)g(a)+(x-a)\left[f'(a)g(x)+f(x)g'(a)\right]+(x-a)\varepsilon(x)\end{aligned}$$

en notant

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= (x-a)f'(a)g'(a)+\varepsilon_2(x)\left(f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varepsilon_1(x)\right)\\ &+\varepsilon_1\left(g(a)+(x-a)g'(a)+(x-a)\varepsilon_2(x)\right)\end{aligned}$$

Remarquons que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
Donc, pour $x \neq a$:

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = f'(a)g(x)+f(x)g'(a)+\varepsilon(x)$$

et en passant à la limite

$$\frac{(fg)(x)-fg(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

Autrement dit

$$\boxed{fg \text{ est dérivable en } a \text{ et } (fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a).}$$

(e) Supposons f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$ et

démontrons que $g\circ f$ est dérivable en a.

D'après 1.(b)

$$f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varepsilon_1(x)$$

et

$$g(y) = g\left(f(a)\right)+(y-f(a))g'\left(f(a)\right)+(y-f(a))\varepsilon_2(y)$$

donc

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$$

Comme $f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g\Big(f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)\Big) \\ &= g\left(f(a)\right) + \Big(f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x) - f(a)\Big)g'\left(f(a)\right) \\ &\quad + \Big(f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x) - f(a)\Big) \\ &\quad \varepsilon_2\Big(f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)\Big) \\ &= g\left(f(a)\right) + (x-a)f'(a)g'\left(f(a)\right) + (x-a)\varepsilon(x) \end{aligned}$$

en notant

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) = {} & g'\left(f(a)\right)\varepsilon_1(x) \\ & + \Big(f'(a) + \varepsilon_1(x)\Big)\varepsilon_2\Big(f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)\Big) \end{aligned}$$

Comme :

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} - f'(a)g'\left(f(a)\right) = \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

on a

$$\boxed{g \circ f \text{ est dérivable en } a \text{ et } (g \circ f)'(a) = f'(a) \times g' \circ f(a).}$$

2. (a) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrons que φ est constante.

* $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable d'après l'énoncé, par construction,
* par composition avec la fonction affine $x \mapsto yx$, elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, d'après ce qui précède, $x \mapsto \ln(xy)$ est dérivable sur$\mathbb{R}_+^*$,
* la fonction constante $x \mapsto -\ln(y)$ est dérivable,
* les combinaisons linéaires de fonctions dérivables sont dérivables (par passage à la limite dans les taux de variation),

donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{y}{xy} - \frac{1}{x}\\ &= 0\end{aligned}$$

Puisque $\varphi' = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus $\varphi(1) = 0$ donc $\varphi = 0$.
Nous avons démontré que

$$\boxed{\text{pour tout } (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).}$$

(b) * $\ln(x^1) = 1\ln(x)$. D'après la question précédente, $\ln(x^2) = \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x)$ puis par une récurrence immédiate

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(x^n) = n\ln(x).}$$

* D'après la propriété démontrée en 2(a), pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned}\ln(1) &= \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)\\ -\ln\left(\frac{1}{x}\right) &= \ln(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\tfrac{1}{x}\right) = -\ln(x).}$$

(c) i. Déterminons $g(1)$.

On a $g(1 \times 1) = g(1) + g(1)$ autrement dit $g(1) = 2g(1)$, $\mathbb{R}$ étant de caractéristique différente de 2,

$$\boxed{g(1) = 0.}$$

ii. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrons : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(xy) = \frac{g'(x)}{y}$.

g est dérivable donc, par composition, $x \mapsto g(xy)$ l'est également et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\mathrm{d}\ g(uy)}{\mathrm{d}\ u}_{|u=x} = yg'(xy)$$

d'où, en dérivant, par rapport à x, dans l'égalité $g(xy) = g(x) + g(y)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ yg'(xy) = g'(x).$$

Ainsi nous avons démontré que

$$\boxed{\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ g'(xy) = \frac{g'(x)}{y}.}$$

iii. D'après ce qui précède : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(y) = \frac{g'(1)}{y}$.
Donc

$$\boxed{\exists c \in \mathbb{R},\ g'(y) = \frac{c}{y}.}$$

iv. Déterminons l'ensemble des solutions.

Nous avons établi que si g est dérivable et vérifie l'équation fonctionnelle alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g' : x \mapsto \frac{c}{x}$.
Puisque g' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et puisque $g(1) = 0$ nous en déduisons que $g : x \mapsto \int_1^x \frac{c}{t}\,\mathrm{d}t$. Autrement dit, par linéarité de l'intégrale, $g = c\ln$.

Réciproquement nous avons démontré en 2(a) que la fonction ln vérifie bien l'équation fonctionnelle (le cas $c = 0$ ne pose pas de problème) donc

$$\boxed{\text{l'ensemble des fonctions dérivables sur } \mathbb{R}_+^* \text{ solutions de l'équation } g(x+y) = g(x) + g(y) \text{ est } \{c\ln \mid c \in \mathbb{R}\}.}$$

(d) $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc $\ln' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Enfin

$$\boxed{\ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

(e) $\mathbb{R}$ est archimédien et $\ln(2) > \ln(1) = 0$, car ln est strictement croissante, donc

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \ n\ln(2) \geqslant A$$

Enfin puisque $\ln(2) > 0$

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N}^*, \ n \geqslant \frac{A}{\ln(2)}.}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant 2^n > 0$.
Par croissance du logarithme

$$\ln(x) \geqslant \ln\left(2^n\right)$$

D'après 2.(b) :

$$\ln(x) \geqslant n\ln(2)$$

Or $n \geqslant \frac{A}{\ln(2)}$ donc

$$\ln(x) \geqslant \frac{A}{\ln(2)}\ln(2)$$
$$\ln(x) \geqslant A$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ x \geqslant 2^n \Rightarrow \ln(x) \geqslant A.}$$

(f) * Déterminons l'éventuelle limite de ln en $+\infty$.

Nous avons établi à la question précédente

$$\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists \eta \in \mathbb{R}, \ x \geqslant \eta \Rightarrow \ln(x) \geqslant A,$$

où $\eta = 2^n$.
Autrement dit

$$\boxed{\ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.}$$

* Déterminons l'éventuelle limite de ln en 0^+.

  D'après la question 2.(b), pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

  Or

$$\frac{1}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} +\infty$$

  donc, par composition, d'après le point précédent

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} +\infty.$$

  Finalement

$$\boxed{\ln(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} -\infty.}$$

(g) Démontrons que ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

D'après 1.(c) ln est continue, d'après 2.(d) ln est strictement croissante donc, d'après le théorème de la bijection ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]\lim_{x\to 0^+} \ln(x), \lim_{x\to+\infty} \ln(x)[$.
Enfin d'après la question 2.(f)

$$\boxed{\ln \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(h) Soit $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Démontrons : $\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2} \iff a^2 + b^2 = 14ab$.

$$\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2}$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
2\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) - \ln(a) - \ln(b) &= 0\\
\ln\left[\left(\frac{a+b}{4}\right)^2\right] - \ln(a) - \ln(b) &= 0 \quad \text{d'après 2.(b)}\\
\ln\left(\frac{(a+b)^2}{16ab}\right) &= 0 \quad \text{d'après 2.(a) et (b)}
\end{aligned}$$

Puisque ln est bijective (d'après 2.(g)) et puisque $\ln(1) = 0$ par construction la précédente égalité équivaut encore succesivement à

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)^2}{16ab} &= 1\\
(a+b)^2 &= 16ab\\
a^2 + 2ab + b^2 &= 16ab
\end{aligned}$$

Nous avons démontré

$$\boxed{\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2} \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 14ab.}$$

II Première équation fonctionnelle de Cauchy.

3. (a) Déterminons $f(0)$.

Par additivité :

$$f(0+0) = f(0) + f(0)$$

Autrement dit

$$\begin{aligned}
f(0) &= 2f(0)\\
0 &= f(0)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(0) = 0.}$$

(b) Montrons que f est impaire.

* Le domaine de définition de f, $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0.
* Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x) + f(-x)$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) &\Leftrightarrow 0 = f(x) + f(-x) \\ &\Leftrightarrow -f(x) = f(-x) \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{f \text{ est impaire.}}$$

(c) Soit $\mathcal{P}(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$ ».

Démontrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $f(0x) = f(0) = 0$ et $0f(x) = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f[(n+1)x] = f(nx + x)$$

Par additivité

$$f[(n+1)x] = f(nx) + f(x)$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} f[(n+1)x] &= nf(x) + f(x) \\ &= (n+1)f(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x).}$$

(d) Soit r un nombre rationnel.

Démontrons que $rf(x) = f(rx)$.

Puisque $r \in \mathbb{Q}$ il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{a}{b}$.
$\frac{x}{b} \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ donc, d'après la question précédente

$$bf\left(\frac{x}{b}\right) = f\left(b\frac{x}{b}\right)$$

Ceci équivaut successivement à

$$\begin{aligned} bf\left(\frac{1}{b}x\right) &= f(x) \\ \left(\frac{1}{b}x\right) &= \frac{1}{b}f(x) \end{aligned}$$

Enfin, toujours d'après la question précédente, et puisque $a \in \mathbb{Z}$

$$f\left(a\frac{1}{b}x\right) = a\frac{1}{b}f(x)$$

Finalement

$$f\left(\frac{a}{b}x\right) = \frac{a}{b}f(x)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (r, x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R},\ rf(x) = f(rx).}$$

(e) Démontrons : $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = rf(a)$.

Soit $r \in \mathbb{Q}$.
D'après la question précédente : $f(r) = f(r \times 1) = rf(1)$.
Donc

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = rf(1).}$$

4. Démontrons : $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xa$.

   Notons $a = f(1)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
   D'après la question précédente

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(r_n) = r_n f(1).$$

   Or par linéarité du passage à la limite des suites convergentes d'une part

   $$r_n f(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x f(1),$$

   et d'autre part, par continuité de f,

   $$\lim_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x),$$

   donc

   $$f(x) = x f(1).$$

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x f(1).}$$

   Donc les fonctions additives et continues sur $\mathbb{R}$ sont nécessairement des fonctions linéaires.
   La réciproque est immédiate.

   Les fonctions additives et continues sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions linéaires.

5. (a) * Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto f(t+x)$ sont continues sur le segment $[0;1]$ donc intégrables sur $[0;1]$.
   * Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$f(x) = f(x)\int_0^1 \mathrm{d}t$$

   Par linéarité

   $$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(x+t-t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Par additivité et imparité de f :

$$f(x) = \int_0^1 f(x+t) - f(t)\ \mathrm{d}t$$

Par linéarité :

$$f(x) = \int_0^1 f(x+t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^1 f(x+t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t.}$$

(b) Démontrons l'égalité.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\varphi : t \mapsto x + t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et $\varphi([0;1]) = [x, x+1]$ donc

$$\int_0^1 f(x+t)\ \mathrm{d}t = \int_x^{x+1} f(u)\ \mathrm{d}u$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t.}$$

(c) Déterminons f'.

f étant continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse et la question précédente, en notant F une primitive de f, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= [F(t)]_x^{x+1} - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t \\ &= F(x+1) - F(x) - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or par construction $x \mapsto F(x)$ et donc $x \mapsto F(x+1)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = f(x+1) - f(x)$$

Enfin par aditivité de f

$$f'(x) = f(x) + f(1) - f(x)$$

Ainsi

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f' : x \mapsto f(1).}$$

(d) Puisque $f'(x) = f(1)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout x réel, $f(x) = f(1)x + \lambda$.
En particulier : $f(1) = f(1) \times 1 + \lambda$ et donc $\lambda = 0$.
Donc les fonctions additives et continues sur $\mathbb{R}$ sont nécessairement des fonctions linéaires.
La réciproque est immédiate.

$$\boxed{\text{Les fonctions additives et continues sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions linéaires.}}$$

III Restriction des hypothèses.

6. (a) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall h \in \mathbb{R},\ |h| < \eta \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \eta$.

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} |f(x_0) + f(h) - f(x_0)| &< \varepsilon \\ |f(h)| &< \varepsilon \\ |f(h) - f(0)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ |h| < \eta \Rightarrow |f(h + 0) - f(0)| < \varepsilon.$$

Autrement dit

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Démontrons que f est continue en x.

Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.
$f(x+h) = f(x) + f(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(x) + f(0) = f(x)$ puisque f est continue en 0 et que $f(0) = 0$.
Ainsi f est continue en x.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

(c) Si f est additive $\mathbb{R}$ et continue en un point alors f est continue partout et, d'après la partie II, f est linéaire.

7. (a) Justifions l'existence des suites en en exhibant.

Choisissons pour a_n et b_n les valeurs approchées de x_0, respectivement, par défaut et par excès de x_0 à 10^{-n} près.
Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = \frac{1}{10^n} \lfloor x_0 10^n \rfloor \\ b_n = \frac{1}{10^n} \lceil x_0 10^n \rceil \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que les trois critères sont vérifiés.

$$\boxed{\text{Les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ existent bien.}}$$

(b) Supposons f décroissante.

Démontrons que $f(x_0) = x_0 f(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par construction des suites : $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$.
Puisque f est décroissante

$$f(a_n) \geqslant f(x_0) \geqslant f(b_n).$$

a_n et b_n étant rationnels, d'après 3.(d)

$$a_n f(1) \geqslant f(x_0) \geqslant b_n f(1).$$

Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n f(1) \geqslant f(x_0) \geqslant b_n f(1).$$
Comme $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} b_n = x_0$, d'après le théorème des gendarmes

$$\boxed{f(x_0) = x_0 f(1).}$$

Le raisonnement serait le même si f est croissante.

(c) Nous avons établi que
$$\forall x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) = x_0 f(1),$$
donc

$$\boxed{f \text{ est une fonction linéaire.}}$$

8. (a) La réponse apparaît en raisonnant par analyse-synthèse.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons qu'il existe $r_n \in \mathbb{Q},\ nx - r_n \in [\alpha, \beta]$.

$\alpha < \beta$ donc
$$nx - \beta < nx - \alpha$$
Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ il existe $r_n \in \mathbb{Q}$ tel que
$$r_n \in [nx - \beta ; nx - \alpha]$$
Autrement dit
$$\begin{cases} nx - \beta \leqslant r_n \\ r_n \leqslant nx - \alpha \end{cases}$$
Ce qui équivaut à
$$\begin{cases} nx - r_n \leqslant \beta \\ \alpha \leqslant nx - r_n \end{cases}$$
Nous avons démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists r_n \in \mathbb{Q},\ \alpha \leqslant nx - r_n \leqslant \beta.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons l'inégalité proposée.

Par additivité

$$f(nx - r_n) = f(nx) - f(r_n)$$

D'après la question 3.(d)

$$\begin{aligned} f(nx - r_n) &= nf(x) - r_n f(1) \\ &= nf(x) - nax + nax - r_n f(1) \\ &= n\left(f(x) - ax\right) + a\left(nx - r_n\right) \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire inversée :

$$\begin{aligned} |f(nx - r_n)| &\geqslant |n\left(f(x) - ax\right)| - |a\left(nx - r_n\right)| \\ &\geqslant n\,|f(x) - ax| - |a||nx - r_n| \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |f(nx - r_n)| \geqslant n\,|f(x) - ax| - |a||nx - r_n|.}$$

(c) Démontrons que $f(x) = ax$.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n\,|f(x) - ax| \leqslant |f(nx - r_n)| + |a||nx - r_n|.$$

$nx - r_n \in [\alpha, \beta]$ et f est bornée sur $[\alpha, \beta]$ donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|f(nx - r_n)| + |a||nx - r_n| \leqslant M.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n\,|f(x) - ax| \leqslant M.$$

$\mathbb{R}$ étant archimédien, nécessairement $f(x) - ax = 0$.
Autrement dit on a démontré dans cette question 8 que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax.$$

si f est additive et bornée sur un segment non trivial alors f est linéaire.

IV D'autres équations fonctionnelles.

9. (a) Déterminons $f(0)$.

En utilisant l'équation fonctionnelle

$$f(0) = f(0)^2$$

ce qui équivaut successivement à

$$f(0)(1 - f(0)) = 0$$
$$f(0) = 0 \quad \text{ou} \quad f(0) = 1$$

De plus si $f(0) = 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x + 0) \\ &= f(x) \times f(0) \\ &= f(x) \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{f(0) = 1 \text{ ou } f = 0.}$$

(b) i. Démontrons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{2}\right) \times f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.
De plus si f s'annule en un point a alors f est identiquement nulle (si $a \neq 0$ alors $f(x) = f(a)f\left(\frac{x}{a}\right) = 0$). Puisque nous supposons f non identiquement nulle

$$\boxed{f > 0.}$$

ii. Démontrons que, pour tous x et y réels, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln(f(x+y)) \\ &= \ln(f(x) \times f(y)) \\ &= \ln(f(x)) + \ln(f(y)) \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) = g(x) + g(y).}$$

iii. Déterminons f.

A. D'après la question précédente g est additive.

B. f est ln étant continues g l'est aussi.

Des points précédents nous déduisons grâce au 5.(d) que g est la fonction affine $g : x \mapsto g(1)x$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
De

$$\ln \circ f(x) = g(1)x,$$

nous déduisons

$$\exp \circ \ln \circ f(x) = \exp(g(1)x).$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \exp(\ln \circ f(1)x).}$$

Il est clair que réciproquement une telle fonction vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy.

L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ solutions de la deuxième équation fonctionnelle de Cauchy est $\{x \mapsto \exp(ax) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

10. (a) $\boxed{\text{L'image de la moyenne de deux nombres est la moyenne des images de ces nombres.}}$

(b) Démontrons l'identité proposée.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{x+0}{2}\right) \\ f(x) &= \frac{f(x)+f(0)}{2} \quad (E_1) \end{aligned}$$

De même :

$$f(y) = \frac{f(y)+f(0)}{2} \quad (E_2)$$

En sommant membre à membre (E_1) et (E_2) :

$$\begin{aligned} f(x)+f(y) &= \frac{f(x)+f(y)}{2} + f(0) \\ f(x)+f(y) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(0) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)+f(y)-f(0) = f(x+y).}$$

(c) Déterminons l'équation fonctionnelle vérifiée par g.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & f(x)+f(y)-f(0) = f(x+y) \\ \Longleftrightarrow\ & f(x)-b+f(y)-b = f(x+y)-b \\ \Longleftrightarrow\ & g(x)+g(y) = g(x+y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+y) = g(x)+g(y).}$$

Puisque g, comme f, est continue et est additive, g est linéaire :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = ax.$$

Donc

$$\exists a \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = ax + f(0).$$

Réciproquement toute fonction linéaire est solution de l'équation fonctionnelle de Jensen donc

> L'ensemble des solutions de l'équation fonctionnelle de Jensen est l'ensemble des fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$.

11. (a) i. Étudions g.

* $g(4) = 4$.
* $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
* $g(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} \frac{4}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty$.
* g est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x \times 2x - (x^2 + 16) \times 2}{(2x)^2} \\ &= \frac{x^2 - 16}{2x^2} \\ &= \frac{(x-4)(x+4)}{2x^2} \end{aligned}$$

x	0		4		$+\infty$
g'	$\Vert$	$-$		$+$	
g	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

ii. Étudions le signe de h.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$h(x) = \frac{(4-x)(4+x)}{2x}$$

x	0	4	$+\infty$
h	$\|$	$+$ 0 $-$	

(b) i. D'après la question 11.(a).ii, puisque $u_0 = x \geqslant 4$, $h(u_0) \leqslant 0$.
Autrement dit $u_0 \geqslant u_1$.

Puisque g est croissante sur $[4, +\infty[$ il est alors aisé de démontré par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Puisque par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 4$, la suite est minorée par 4.

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

De plus, g étant continue, la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $g(\ell) = \ell$.
D'après la question 11.(a).ii g n'admet qu'un point fixe à savoir 4.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4.}$$

ii. Soit $x \in [4, +\infty[$.
$f(x) = f(u_0) = f(g(u_0)) = f(u_1)$
Par une récurrence évidente : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(u_n)$.
Puis, f étant continue, en passant à la limite $f(x) = f(4)$.

$$\boxed{\forall x \in [4, +\infty[,\ f(x) = f(4).}$$

(c) Si $x \in]0;4[$ alors $u_1 = g(x) \in]4,+\infty[$ et donc on peut construire une suite semblable à la précédente de sorte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 4.

$$\boxed{\forall x \in]0;4[,\ f(x) = f(4).}$$

(d) Des questions précédents nous déduisons que l'ensemble des fonctions recherchées est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}_+^*$.