Capes de mathématique 2023 épreuve 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 5 heures.

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions relevant de la circulaire du 17 juin 2021 BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Notations.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Problème n° 1 : vrai-faux.

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse « vrai » ou « faux » non argumentée ne sera pas prise en compte.

I Analyse.

Ici $[a;b]$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$.

1. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas paire si, et seulement si, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) \neq f(-x)$.

   L'assertion est fausse.

   Pas de démonstration possible : il s'agit de la définition de l'imparité.

   La condition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(-x).$$

est suffisante pour affirmer que f n'est pas paire mais elle n'est pas nécessaire. En effet, si f n'est pas paire alors

$$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(-x).$$

2. Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$ et à valeurs dans $[a;b]$. L'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

   L'assertion est vraie.

   Si $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution.

   Supposons $f(a) \neq a$ et $f(b) \neq b$.
   Puisque $f(a) \in [a;b]$ et $f(a) \neq a$ alors $f(a) - a > 0$. De même $f(b) - b < 0$.
   $x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[a;b]$ et $f(a) - a > 0$ et $f(b) - b < 0$ il existe $x_0 \in]a;b[$ tel que $f(x_0) - x_0 = 0$.

   Dans tous les cas l'équation $f(x) = x$ admet une solution.

3. Soient deux fonctions f et g définies et continues sur $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, alors pour tout $x \in [a;b]$, on a $f(x) > g(x)$.

   L'affirmation est fausse.

   Si $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x-1 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \right.$
   Comme $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2}$ et $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ on a bien $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
   Et pourtant $f(0) \leqslant g(0)$.

4. Si la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle est nulle, alors la fonction est nulle sur cet intervalle.

   L'affirmation est fausse.

   $\frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x = 0$ et pourtant $x \mapsto x$ n'est pas identiquement nulle.

5. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 2$ sont les fonctions

$$x \mapsto k\exp(2x) + 1$$

où k désigne un nombre réel quelconque.

L'affirmation est fausse.

La fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$ est solution de l'équation différentielle.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = k\exp(2x) + 1$.
Nous aurions alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + 1 &= k\mathrm{e}^{2x} + 1 \\ 1 &= k\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

ce qui est impossible.
Nous avons démontré par l'absurde que g, qui est bien solution de l'équation différentielle, n'est pas une fonction de la forme $x \mapsto k\exp(2x) + 1$.
Il manque des solutions de l'équation différentielle dans l'énoncé.

6. La négation de l'assertion « toute suite réelle majorée converge » est « il existe des suites réelles minorées qui ne convergent pas ».

L'affirmation est fausse.

La négation, par exemple, de « suite majorée » n'est pas « suite minorée ».
En effet dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée c'est dire

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$$

or sa négation est

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M,$$

alors que dire que la suite est minorée par M s'exprime par

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > M.$$

La négation de la première phrase est « il existe une suite réelle majorée et divergente ».

7. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \cdots + \frac{1}{(-7)^n}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel strictement plus grand que 1.

L'affirmation est fausse.

On reconnaît dans u_n la somme des $n+1$ premiers termes dune suite géométrique de terme initial 1 et de raison $-\frac{1}{7}$ donc

$$u_n = \frac{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{7}\right)}.$$

Puisque $-\frac{1}{7} \in]-1;1[$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n = 0,$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{7}} = \frac{7}{8} < 1.$$

8. Un cycliste parcourt 40 km la semaine 0. Il décide que, chaque semaine, il parcourra 5 km de plus que la distance parcourue lors de la semaine précédente.
La fonction *seuil* présentée ci-dessous, écrite en langage Python, permet de déterminer le numéro de la semaine où la distance totale qu'il aura parcourue sera supérieure à un nombre n donné.

```
def seuil(n) :
    k=0
    u=40
    S=40
    while S<n :
        k=k+1
        S=S+u+5
    return k
```

L'affirmation est fausse.

La variable u est censée représentée la distance parcourue lors de la semaine. u devrait augmenter lors de l'exécution de la boucle et ce n'est pas le cas. Il manque une incrémentation de u.

* À la fin de la semaine 2 la distance parcourue en km est de $40 + (40 + 5) + (40 + 5 + 5) = 135$.
* Par conséquent l'instruction seuil(134) devrait renvoyer 2.
  Or

	n	k	u	S	S<n
1	134				
2	134	0			
3	134	0	40		
4	134	0	40	40	
5	134	0	40	40	1
6	134	1	40	40	1
7	134	1	40	85	1
5	134	1	40	85	1
6	134	2	40	85	1
7	134	2	40	130	1
5	134	2	40	130	1
6	134	3	40	130	1
7	134	3	40	170	1
5	134	3	40	170	0
8					

donc le programme ne renvoie pas 2 comme attendu.

II Géométrie.

9. Étant donnés trois points A, B et C du plan, la contraposée de l'assertion

$$ABC \text{ est un triangle rectangle en } A \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

est

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow ABC \text{ est un triangle rectangle en } A.$$

L'affirmation est fausse.

L'assertion proposée n'est pas la contraposée mais la réciproque de la première assertion.

10. On se place dans un plan vectoriel P muni d'un produit scalaire noté $(\,.\,|\,.\,)$ et d'une norme associée notée $\|\,.\,\|$. Soient x et y dans P tels que $\|x\| = \|y\|$. Les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux.

L'affirmation est vraie.

Par bilinéarité du produit scalaire :

$$(x+y|x-y) = (x|x) - (x|y) + (y|x) - (y|y)$$

Puisque $||.||$ est associée à $(.|.)$

$$(x+y|x-y) = ||x||^2 - (x|y) + (y|x) - ||y||^2$$

Par symétrie du produit scalaire :

$$(x+y|x-y) = ||x||^2 - (x|y) + (x|y) - ||y||^2$$

Comme $||x|| = ||y||$:

$$(x+y|x-y) = 0$$

11. On se place dans un plan vectoriel P muni d'un produit scalaire noté $(\ .\ |\ .\ )$. Pour tous vecteurs x, y et z de P, on a

$$(x|z) = (y|z) \Rightarrow x = y.$$

L'affirmation est fausse.

Donnons un contre-exemple.
Soit $z \in P \setminus \{0\}$.
Il existe $x \in P \setminus \{0\}$ qui appartienne à l'orthogonal de z.
Notons enfin $y = -x$.
Par construction $(x|z) = 0$ et $(y|z) = 0$ donc $(x|z) = (y|z)$ et pourtant $x \neq y$.

12. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère les points $A(-4,1)$, $B(3,0)$ et $C(5,4)$.
La médiatrice de $[AC]$ a pour équation $x + y = 3$.

L'affirmation est fausse.

Notons $d : x + y = 3$.
$B \in d$ car $3 + 0 = 3$.
B appartient à la médiatrice de $[AC]$ si et seulement si $AB = BC$.
Or, le repère étant orthonormé, $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{[3-(-4)]^2 + (0-1)^2} = 5\sqrt{2}$ et, de même, $BC = 2\sqrt{5}$ donc B n'appartient pas à la médiatrice de $[AC]$.
Enfin nous en déduisons que d n'est pas la médiatrice de $[AC]$.

13. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé, l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z-2| = |z+1|$ est réduit au point d'affixe $\frac{1}{2}$.

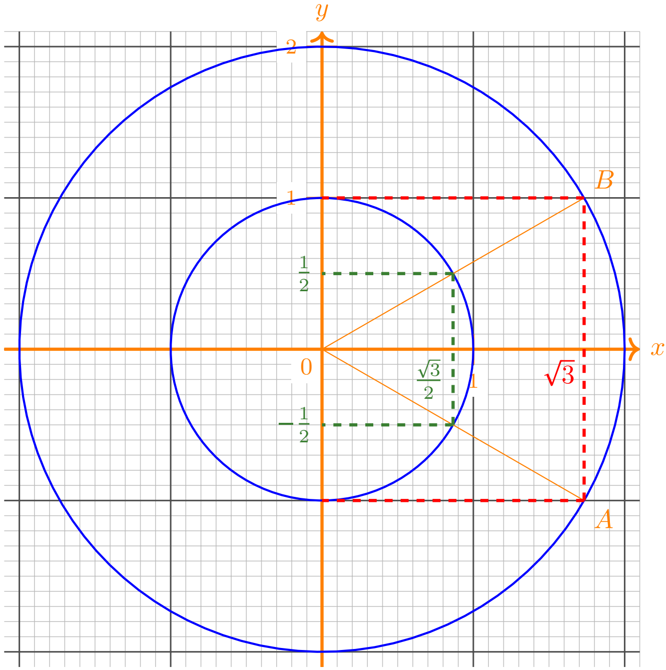
L'affirmation est fausse.

Traduisons en géométrie affine le problème : on recherche les points M d'affixe z qui sont équidistants des points A, d'affixe 2, et B, d'affixe -1.
L'ensemble des points recherchés forment la médiatrice de $[AB]$.
Il n'y a pas unicité de la solution au problème.

14. Dans le plan affine euclidien orienté muni d'un repère cartésien orthonormé direct d'origine O, on considère les points A et B d'affixes respectives $\sqrt{3} - i$ et $\sqrt{3} + i$.
L'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ mesure $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

L'affirmation est vraie.

Il suffit d'un schéma pour s'en convaincre et vraisemblablement justifier la réponse (théorème de Thalès et valeurs remarquables de sinus et cosinus).



$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) \mod (2\pi)$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} &= \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \\
&= \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)} \\
&= \frac{\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3}i - 1}{\sqrt{3}^2 + 1} \mod (2\pi) \\
&= \frac{2+2\sqrt{3}i}{4} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) &\equiv \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mod (2\pi)\\ &\equiv \arg\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right) \mod (2\pi)\\ &\equiv \frac{\pi}{3} \mod (2\pi)\end{aligned}$$

15. Dans l'espace affine euclidien, muni d'un repère cartésien orthonormé, le plan P d'équation $x-2y+3=-5$ et la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2+t\\ y=-t\\ z=-1-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ sont perpendiculaires.

L'affirmation est fausse.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P et $\vec{d}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.
P et D sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{d}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires (nous sommes dans un espace de dimension 3).
$\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=4\neq 0$ donc $\vec{d}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent P et D ne sont pas perpendiculaires.

III Matrices.

16. La matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ est inversible et diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espace des matrices à coefficients réels à 2 lignes et 2 colonnes.

L'affirmation est vraie.

Le polynôme caractéristique de $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ est $\chi_A(X)=\det\left(A-XI_2\right)=\begin{vmatrix}-X & 1\\ 1 & -X\end{vmatrix}=X^2-1=(X-1)(X+1)$.

Le polynôme caractéristique étant un polynôme annulateur de A, nous pouvons affirmer que nous avons trouver un polynôme annulateur scindé simple de A donc A est diagonalisable.

Les valeurs propres de A étant non nulles (1 et -1) A est inversible.

17. Si A et B sont des matrices carrées à n lignes et n colonnes telles que $AB = 0$, alors A ou B n'est pas inversible.

    L'affirmation est vraie.

    Raisonnons par l'absurde en supposant que : $AB = 0$ et A et B sont inversibles.

    Nous en déduisons

$$A^{-1}AB = A^{-1}0$$
$$B = 0$$

    ce qui contredit le fait que B est inversible.

    On a démontré par l'absurde que si $AB = 0$ alors A ou B n'est pas inversible.

IV Pourcentages.

18. En 2019, le prix du tabac a augmenté de 12 %, en 2020 de 16 %, en 2021 de 7 %.

    L'augmentation du prix du tabac de 2019 à 2021 a été de 35 %.

    L'affirmation est fausse.

    Les augmentations de 12 %, 16 % et 7 % correspondent à des coefficients multiplicateurs respectivement de $1,12$, $1,16$ et $1,07$.

    Le coefficient multiplicateur global pour ces trois évolutions est donc de $1,12 \times 1,16 \times 1,07 = 1,390144$.

    Autrement il s'agit d'une augmentation globalement d'approximativement 39 %.

19. Armelle et Boris ne suivent pas les mêmes enseignements. La semaine 1, Armelle a réussi 50 % des exercices qu'elle a traités et Boris 90 % des exercices qu'il a traités. La semaine 2, Armelle a réussi 20 % des exercices qu'elle a traités et Boris 40 % des exercices qu'il a traités.

Sur l'ensemble de la quinzaine, Boris a nécessairement réussi un plus grand pourcentage d'exercices traités qu'Armelle.

L'affirmation est fausse.

Donnons un contre-exemple.

Semaine 1.

	Armelle	Boris
Nombre d'exercices	1000	10
Nombre de réussite	500	9

Semaine 2.

	Armelle	Boris
Nombre d'exercices	10	1000
Nombre de réussite	2	400

La proportion de réussite d'Armelle est $\frac{500+2}{1000+10}$ et celle de Boris $\frac{9+400}{10+1000}$.

V Arithmétique.

20. Soit n un entier naturel.
    $n^3 - n$ est pair.

L'affirmation est vraie.

$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$.
Le produit de trois entiers consécutif contient forcément un nombre pair donc ce produit est pair.

21. Soient un entier relatif x et un entier naturel non nul n.
    Si $x^2 \equiv 9\ [n]$ alors $x \equiv 3\ [n]$ ou $x \equiv -3\ [n]$.

L'affirmation est fausse.

Donnons un contre-exemple.
$6^2 \equiv 9\ [27]$.
$6 \not\equiv 3\ [27]$ et $6 \not\equiv -3\ [27]$.

VI Dénombrement.

22. Le nombre de parties d'un ensemble à 10 éléments est égale à 100.

L'affirmation est fausse.

Le nombre de parties d'un ensemble fini E de cardinal $|E| = 10$ est $2^{|E|} = 2^{10} = 1024$.

23. Étant donné un entier naturel n supérieur ou égale à 3, on trace dans un plan n droites de sorte qu'il n'existe pas parmi elles deux droites parallèles ni trois droites concourantes.

Le nombre de triangles ainsi obtenus est égale à $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

VII Probabilités.

24. On choisit un numéro ente 1 et 6. On lance un dé équilibré à 6 faces jusqu'à l'obtention du numéro choisi.

La probabilité de devoir effectuer au moins 3 lancers pour obtenir le numéro choisi est $\dfrac{5^2}{6^2}$.

L'affirmation est vraie.

Supposons, par exemple, que le numéro choisi est le 6.
Il faut donc calculer la probabilité de l'événement A : « le 6 n'est pas obtenu lors des deux premiers lancers ».
Modélisons l'expérience avec $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, pour la tribu (nous sommes dans le cas fini) $\mathscr{P}(\Omega)$ convient et la loi est la loi uniforme sur Ω (puisque les lancers sont indépendants et que chacun est régi par l'équiprobabilité).
A est formé des éléments de $[\![1,5]\!]^2$ donc $|A| = |[\![1,5]\!]|^2 = 5^2$.
De même $|\Omega| = 6^2$.
Puisque la loi est celle de l'équiprobabilité :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|}\\ &= \frac{5^2}{6^2}\end{aligned}$$

25. Soient A et B deux événements de probabilité non nulle dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

L'affirmation est vraie.

$$\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
(1 - \mathbb{P}(A))\,(1 - \mathbb{P}(B)) &= 1 - \ \mathbb{P}(A \cup B) \\
1 - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) &= 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) \\
1 - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap B)
\end{aligned}$$

Problème n° 2 : équations fonctionnelles.

I Quelques résultats classiques.

Dans cette partie, qui traite de points élémentaires, un soin particulier devra être apporté à la rigueur et à la précision des arguments donnés.

1. **Dérivabilité.**
   Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et un élément a de I.

   (a) Donner une définition de l'assertion « f est dérivable en a ».

   f est dérivable en a si et seulement si

   $$\exists \ell \in \mathbb{R}, \ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

   (b) On suppose que f est dérivable en a et on note $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a.
   Démontrez que f admet un développement limité d'ordre 1 en a, qui est

   $$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + g(x)$$

où g est une fonction négligeable devant $x \mapsto x - a$ en a. *On pourra considérer la fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ définie par $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$ si $x \neq a$ et $\varepsilon(a) = 0$.*

Démontrons que f, dérivable en a, admet un développement limité d'ordre 1 en a.

Si $x = a$ l'égalité est triviale sinon avec la notation de l'énoncé, pour tout x dans un voisinage de a et $x \neq a$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = \varepsilon(x)$$

ce qui équivaut successivement à :

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = (x - a)\varepsilon(x)$$
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$$

Et comme f est dérivable en a $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{f \text{ admet un développement limité d'ordre 1 en } a.}$$

(c) i. Démontrer que si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Supposons f dérivable en a et

démontrons que f est continue en a.

D'après la question précédente, pour x dans un voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.
En passant à la limite dans la précédente égalité :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a).$$

Autrement dit

$$\boxed{f \text{ est continue en } a.}$$

ii. Donner, sans démonstration, un contre-exemple pour l'assertion réciproque.

La fonction valeur absolue est continue sans être dérivable en 0.

(d) Soit $g : I \to \mathbb{R}$. Démontrer que si f et g sont dérivables en a alors fg l'est aussi. Expliciter $(fg)'(a)$.

Supposons f et g dérivables en a et

démontrons que fg est dérivable en a.

D'après 1.(b)

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$$

et

$$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)\varepsilon_2(x)$$

donc

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)g(x)\\ &= \Big(f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)\Big)\\ &\qquad \times \Big(g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)\varepsilon_2(x)\Big)\\ &= f(a)g(a) + (x-a)\Big[f'(a)g(x) + f(x)g'(a)\Big] + (x-a)\varepsilon(x)\end{aligned}$$

en notant

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) = (x-a)f'(a)g'(a) + \varepsilon_2(x)\Big(f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)\Big)\\ + \varepsilon_1\Big(g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)\varepsilon_2(x)\Big)\end{aligned}$$

Remarquons que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
Donc, pour $x \neq a$:

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = f'(a)g(x) + f(x)g'(a) + \varepsilon(x)$$

et en passant à la limite

$$\frac{(fg)(x)-fg(a)}{x-a}\underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

Autrement dit

$$\boxed{fg \text{ est dérivable en } a \text{ et } (fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).}$$

(e) Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I)\subset J$ et une fonction $g:J\to\mathbb{R}$. Démontrer que si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en a. Expliciter $(g\circ f)'(a)$.

Supposons f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$ et

démontrons que $g\circ f$ est dérivable en a.

D'après 1.(b)

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varepsilon_1(x)$$

et

$$g(y)=g\left(f(a)\right)+(y-f(a))g'\left(f(a)\right)+(y-f(a))\varepsilon_2(y)$$

donc

$$g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)$$

Comme $f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varepsilon_1(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$:

$$\begin{aligned}g\circ f(x)&=g\Big(f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varepsilon_1(x)\Big)\\&=g\left(f(a)\right)+\Big(f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varepsilon_1(x)-f(a)\Big)g'\left(f(a)\right)\\&\qquad+\Big(f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varepsilon_1(x)-f(a)\Big)\\&\qquad\varepsilon_2\Big(f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varepsilon_1(x)\Big)\\&=g\left(f(a)\right)+(x-a)f'(a)g'\left(f(a)\right)+(x-a)\varepsilon(x)\end{aligned}$$

en notant

$$\begin{aligned}\varepsilon(x)&=g'\left(f(a)\right)\varepsilon_1(x)\\&\qquad+\Big(f'(a)+\varepsilon_1(x)\Big)\varepsilon_2\Big(f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)\varepsilon_1(x)\Big)\end{aligned}$$

Comme :

$$\frac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{x-a}-f'(a)g'\left(f(a)\right)=\varepsilon(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}0.$$

on a

$$\boxed{g\circ f \text{ est dérivable en } a \text{ et } (g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'\circ f(a).}$$

2. **La fonction logarithme népérien.**

On appelle fonction logarithme népérien l'unique primitive de $x\mapsto\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1, on la note ln.

Ainsi ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ et $\ln(1)=0$.

L'objectif de cette question 2. est de démontrer des propriétés élémentaires du logarithme népérien, dont la plupart figurent au programme de Terminale. À ce stade, ces propriétés sont supposées ne pas encore avoir été établies. De même, la fonction exponentielle de base e *n'est pas supposée avoir été introduite et ne pourra être utilisée.*

(a) Démontrez que pour tout $(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, on a $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$.
On pourra considérer, pour $y\in\mathbb{R}_+^*$ fixé, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x)=\ln(xy)-\ln(x)-\ln(y).$$

Soit $y\in\mathbb{R}_+^*$.

Démontrons que φ est constante.

* $x\mapsto\ln(x)$ est dérivable d'après l'énoncé, par construction,
* par composition avec la fonction affine $x\mapsto yx$, elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, d'après ce qui précède, $x\mapsto\ln(xy)$ est dérivable sur$\mathbb{R}_+^*$,
* la fonction constante $x\mapsto-\ln(y)$ est dérivable,
* les combinaisons linéaires de fonctions dérivables sont dérivables (par passage à la limite dans les taux de variation),

donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\frac{y}{xy}-\frac{1}{x}\\&=0\end{aligned}$$

Puisque $\varphi' = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus $\varphi(1) = 0$ donc $\varphi = 0$.
Nous avons démontré que

$$\boxed{\text{pour tout } (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).}$$

(b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(x^n) = n\ln(x)$ et $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

* $\ln(x^1) = 1\ln(x)$. D'après la question précédente, $\ln(x^2) = \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x)$ puis par une récurrence immédiate

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(x^n) = n\ln(x).}$$

* D'après la propriété démontrée en 2(a), pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui équivaut à :

$$\ln(1) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$-\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\tfrac{1}{x}\right) = -\ln(x).}$$

(c) Le but de cette question est de déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, on a $g(xy) = g(x) + g(y)$.
Soit g une telle fonction.

i. Déterminer $g(1)$.

Déterminons $g(1)$.

On a $g(1 \times 1) = g(1) + g(1)$ autrement dit $g(1) = 2g(1)$, $\mathbb{R}$ étant de caractéristique différente de 2,

$$\boxed{g(1) = 0.}$$

ii. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, on a $g'(xy) = \dfrac{g'(x)}{y}$.

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrons : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(xy) = \frac{g'(x)}{y}$.

g est dérivable donc, par composition, $x \mapsto g(xy)$ l'est également et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\mathrm{d}\ g(uy)}{\mathrm{d}\ u}_{|u=x} = yg'(xy)$$

d'où, en dérivant, par rapport à x, dans l'égalité $g(xy) = g(x) + g(y)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ yg'(xy) = g'(x).$$

Ainsi nous avons démontré que

$$\boxed{\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ g'(xy) = \frac{g'(x)}{y}.}$$

iii. En déduire qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $g'(y) = \dfrac{c}{y}$.

D'après ce qui précède : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(y) = \frac{g'(1)}{y}$.

Donc

$$\boxed{\exists c \in \mathbb{R},\ g'(y) = \frac{c}{y}.}$$

iv. Déterminer l'ensemble des fonctions g dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ qui sont solutions de l'équation fonctionnelle $g(xy) = g(x) + g(y)$.

Déterminons l'ensemble des solutions.

Nous avons établi que si g est dérivable et vérifie l'équation fonctionnelle alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g' : x \mapsto \frac{c}{x}$.

Puisque g' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et puisque $g(1) = 0$ nous en déduisons que $g : x \mapsto \int_1^x \frac{c}{t}\, \mathrm{d}t$. Autrement dit, par linéarité de l'intégrale, $g = c \ln$.

Réciproquement nous avons démontré en 2(a) que la fonction ln vérifie bien l'équation fonctionnelle (le cas $c = 0$ ne pose pas de problème) donc

$$\boxed{\text{l'ensemble des fonctions dérivables sur } \mathbb{R}_+^* \text{ solutions de l'équation } g(x+y) = g(x) + g(y) \text{ est } \{c \ln \mid c \in \mathbb{R}\}.}$$

(d) Démontrer que ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc $\ln' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Enfin

$$\boxed{\ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

(e) Soit $A \in \mathbb{R}$. Après avoir vérifié qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant \dfrac{A}{\ln 2}$, démontrer que, pour tout nombre réel x tel que $x \geqslant 2^n$, $\ln(x) \geqslant A$.

$\mathbb{R}$ est archimédien et $\ln(2) > \ln(1) = 0$, car ln est strictement croissante, donc

$$\exists n \in \mathbb{N}^*,\ n \ln(2) \geqslant A$$

Enfin puisque $\ln(2) > 0$

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant \frac{A}{\ln(2)}.}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant 2^n > 0$.
Par croissance du logarithme

$$\ln(x) \geqslant \ln\left(2^n\right)$$

D'après 2.(b) :

$$\ln(x) \geqslant n \ln(2)$$

Or $n \geqslant \frac{A}{\ln(2)}$ donc

$$\begin{aligned} \ln(x) &\geqslant \frac{A}{\ln(2)} \ln(2) \\ \ln(x) &\geqslant A \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2^n \Rightarrow \ln(x) \geqslant A.}$$

(f) Explicitement les limites de ln en $+\infty$ et 0^+.

* Déterminons l'éventuelle limite de ln en $+\infty$.

Nous avons établi à la question précédente

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta \in \mathbb{R},\ x \geqslant \eta \Rightarrow \ln(x) \geqslant A,$$

où $\eta = 2^n$.
Autrement dit

$$\boxed{\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

* Déterminons l'éventuelle limite de ln en 0^+.

D'après la question 2.(b), pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or

$$\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty$$

donc, par composition, d'après le point précédent

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty.$$

Finalement

$$\boxed{\ln(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} -\infty.}$$

(g) Démontrer que ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Démontrons que ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

D'après 1.(c) ln est continue, d'après 2.(d) ln est strictement croissante donc, d'après le théorème de la bijection ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]\lim_{x\to 0^+} \ln(x), \lim_{x\to+\infty} \ln(x)[$.
Enfin d'après la question 2.(f)

$$\boxed{\text{ln réalise une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(h) Démontrer que pour tout $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, on a

$$\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2} \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 14ab.$$

Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Démontrons : $\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{\ln a+\ln b}{2} \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 14ab.$

$$\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2}$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
2\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) - \ln(a) - \ln(b) &= 0 \\
\ln\left[\left(\frac{a+b}{4}\right)^2\right] - \ln(a) - \ln(b) &= 0 \quad \text{d'après 2.(b)} \\
\ln\left(\frac{(a+b)^2}{16ab}\right) &= 0 \quad \text{d'après 2.(a) et (b)}
\end{aligned}$$

Puisque ln est bijective (d'après 2.(g)) et puisque $\ln(1) = 0$ par construction la précédente égalité équivaut encore succesivement à

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)^2}{16ab} &= 1 \\
(a+b)^2 &= 16ab \\
a^2 + 2ab + b^2 &= 16ab
\end{aligned}$$

Nous avons démontré

$$\boxed{\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2} \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 14ab.}$$

II Première équation fonctionnelle de Cauchy.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est additive sur $\mathbb{R}$ si, pour tous nombres réels x et y,

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble des fonctions f additives et continues sur $\mathbb{R}$.

3. **Résultats préliminaires.**
   Soit f une fonction définie et additive sur $\mathbb{R}$.

   (a) Déterminer $f(0)$.

   Déterminons $f(0)$.

   Par additivité :

$$f(0+0) = f(0) + f(0)$$

   Autrement dit

$$\begin{aligned} f(0) &= 2f(0) \\ 0 &= f(0) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(0) = 0.}$$

   (b) Démontrer que f est une fonction impaire.

   Montrons que f est impaire.

   * Le domaine de définition de f, $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0.

* Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x+(-x)) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x) + f(-x)$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} f(x+(-x)) = f(x) + f(-x) &\Leftrightarrow 0 = f(x) + f(-x) \\ &\Leftrightarrow -f(x) = f(-x) \end{aligned}$$

Finalement

f est impaire.

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x, $f(nx) = nf(x)$.

Soit $\mathcal{P}(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$ ».

Démontrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f(0x) = f(0) = 0$ et $0f(x) = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f[(n+1)x] = f(nx+x)$$

Par additivité

$$f[(n+1)x] = f(nx) + f(x)$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} f[(n+1)x] &= nf(x) + f(x) \\ &= (n+1)f(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x).$$

(d) En déduire que pour tout nombre rationnel r et tout nombre réel x $f(rx) = rf(x)$.

Soit r un nombre rationnel.

Démontrons que $rf(x) = f(rx)$.

Puisque $r \in \mathbb{Q}$ il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{a}{b}$.
$\frac{x}{b} \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ donc, d'après la question précédente

$$bf\left(\frac{x}{b}\right) = f\left(b\frac{x}{b}\right)$$

Ceci équivaut successivement à

$$\begin{aligned} bf\left(\frac{1}{b}x\right) &= f(x) \\ \left(\frac{1}{b}x\right) &= \frac{1}{b}f(x) \end{aligned}$$

Enfin, toujours d'après la question précédente, et puisque $a \in \mathbb{Z}$

$$f\left(a\frac{1}{b}x\right) = a\frac{1}{b}f(x)$$

Finalement

$$f\left(\frac{a}{b}x\right) = \frac{a}{b}f(x)$$

Ainsi

$$\forall (r, x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R},\ rf(x) = f(rx).$$

(e) Démontrer qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre rationnel r, $f(r) = ar$.

Démontrons : $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = rf(a)$.

Soit $r \in \mathbb{Q}$.
D'après la question précédente : $f(r) = f(r \times 1) = rf(1)$.
Donc

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = rf(1).}$$

4. **Première méthode.**
Soit f une fonction additive et continue sur $\mathbb{R}$.
Déduire de la question 3. qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre réel x on a $f(x) = ax$. Conclure.

Démontrons : $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xa$.

Notons $a = f(1)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
D'après la question précédente

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(r_n) = r_n f(1).$$

Or par linéarité du passage à la limite des suites convergentes d'une part

$$r_n f(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} xf(1),$$

et d'autre part, par continuité de f,

$$\lim_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x),$$

donc

$$f(x) = xf(1).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf(1).}$$

Donc les fonctions additives et continues sur $\mathbb{R}$ sont nécessairement des fonctions linéaires.
La réciproque est immédiate.

$$\boxed{\text{Les fonctions additives et continues sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions linéaires.}}$$

5. **Seconde méthode.**
   Soit f une fonction additive et continue sur $\mathbb{R}$.

   (a) Après avoir justifié l'existence de ces intégrales, démontrer que, pour tout nombre réel x :

   $$f(x) = \int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   * Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto f(t+x)$ sont continues sur le segment $[0;1]$ donc intégrables sur $[0;1]$.
   * Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$f(x) = f(x)\int_0^1 \,\mathrm{d}t$$

   Par linéarité

   $$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(x+t-t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Par additivité et imparité de f :

   $$f(x) = \int_0^1 f(x+t) - f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Par linéarité :

   $$f(x) = \int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

   (b) Démontrer que, pour tout nombre réel x :

   $$f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrons l'égalité.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\varphi : t \mapsto x + t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et $\varphi([0;1]) = [x, x+1]$ donc

$$\int_0^1 f(x+t)\ \mathrm{d}t = \int_x^{x+1} f(u)\ \mathrm{d}u$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t.}$$

(c) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

Déterminons f'.

f étant continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse et la question précédente, en notant F une primitive de f, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= [F(t)]_x^{x+1} - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t \\ &= F(x+1) - F(x) - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or par construction $x \mapsto F(x)$ et donc $x \mapsto F(x+1)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = f(x+1) - f(x)$$

Enfin par aditivité de f

$$f'(x) = f(x) + f(1) - f(x)$$

Ainsi

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f' : x \mapsto f(1).}$$

(d) Conclure

Puisque $f'(x) = f(1)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout x réel, $f(x) = f(1)x + \lambda$.

En particulier : $f(1) = f(1) \times 1 + \lambda$ et donc $\lambda = 0$.

Donc les fonctions additives et continues sur $\mathbb{R}$ sont nécessairement des fonctions linéaires.

La réciproque est immédiate.

Les fonctions additives et continues sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions linéaires.

III Restriction des hypothèses.

On pourra, pour les questions suivantes, utiliser les résultats démontrés dans la question 3.

L'objectif de cette partie est d'examiner l'effet sur la conclusion de la partie II de trois restrictions de l'hypothèse de continuité des fonctions additives sur $\mathbb{R}$.

6. **Continuité en un point.**

Soient un nombre réel x_0 et une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ continue en x_0.

(a) Démontrer que f est continue en 0.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall h \in \mathbb{R}$, $|h| < \eta \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \eta$.

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} |f(x_0) + f(h) - f(x_0)| &< \varepsilon \\ |f(h)| &< \varepsilon \\ |f(h) - f(0)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ |h| < \eta \Rightarrow |f(h+0) - f(0)| < \varepsilon.$$

Autrement dit

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$$

(b) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Démontrons que f est continue en x.

Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.
$f(x+h) = f(x) + f(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x) + f(0) = f(x)$ puisque f est continue en 0 et que $f(0) = 0$.
Ainsi f est continue en x.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

(c) Conclure.

> Si f est additive $\mathbb{R}$ et continue en un point alors f est continue partout et, d'après la partie II, f est linéaire.

7. **Monotonie.**
Soit une fonction affine additive et monotone sur $\mathbb{R}$.
Soit x_0 un nombre réel.

(a) Justifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

i. pour tout entier naturel n, $(a_n, b_n) \in \mathbb{Q}^2$.
ii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
iii. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = x_0$.

Justifions l'existence des suites en en exhibant.

Choisissons pour a_n et b_n les valeurs approchées de x_0, respectivement, par défaut et par excès de x_0 à 10^{-n} près.
Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = \frac{1}{10^n}\lfloor x_0 10^n \rfloor \\ b_n = \frac{1}{10^n}\lceil x_0 10^n \rceil \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que les trois critères sont vérifiés.

Les suites (a_n) et (b_n) existent bien.

(b) Démontrer que $f(x_0) = x_0 f(1)$.

Supposons f décroissante.

Démontrons que $f(x_0) = x_0 f(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par construction des suites : $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$.
Puisque f est décroissante

$$f(a_n) \geqslant f(x_0) \geqslant f(b_n).$$

a_n et b_n étant rationnels, d'après 3.(d)

$$a_n f(1) \geqslant f(x_0) \geqslant b_n f(1).$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n f(1) \geqslant f(x_0) \geqslant b_n f(1).$$

Comme $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} b_n = x_0$, d'après le théorème des gendarmes

$$f(x_0) = x_0 f(1).$$

Le raisonnement serait le même si f est croissante.

(c) Conclure.

Nous avons établi que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) = x_0 f(1),$$

donc

f est une fonction linéaire.

8. **Encadrement.**
Soient deux nombres réels α et β, avec $\alpha < \beta$, et une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $[\alpha, \beta]$.
Soit x un nombre réel.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, il existe un nombre rationnel r_n tel que $nx - r_n \in [\alpha, \beta]$.

La réponse apparaît en raisonnant par analyse-synthèse.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons qu'il existe $r_n \in \mathbb{Q},\ nx - r_n \in [\alpha, \beta]$.

$\alpha < \beta$ donc

$$nx - \beta < nx - \alpha$$

Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ il existe $r_n \in \mathbb{Q}$ tel que

$$r_n \in [nx - \beta; nx - \alpha]$$

Autrement dit

$$\begin{cases} nx - \beta \leqslant r_n \\ r_n \leqslant nx - \alpha \end{cases}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} nx - r_n \leqslant \beta \\ \alpha \leqslant nx - r_n \end{cases}$$

Nous avons démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists r_n \in \mathbb{Q},\ \alpha \leqslant nx - r_n \leqslant \beta.}$$

(b) On pose $f(1) = a$. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$|f(nx - r_n)| \geqslant n\,|f(x) - ax| - |a||nx - r_n|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons l'inégalité proposée.

Par additivité

$$f(nx - r_n) = f(nx) - f(r_n)$$

D'après la question 3.(d)

$$\begin{aligned} f(nx - r_n) &= nf(x) - r_n f(1) \\ &= nf(x) - nax + nax - r_n f(1) \\ &= n\left(f(x) - ax\right) + a\left(nx - r_n\right) \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire inversée :

$$\begin{aligned}|f(nx-r_n)| &\geqslant |n\,(f(x)-ax)| - |a\,(nx-r_n)| \\ &\geqslant n\,|f(x)-ax| - |a||nx-r_n|\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |f(nx-r_n)| \geqslant n\,|f(x)-ax| - |a||nx-r_n|.}$$

(c) Conclure.

Démontrons que $f(x) = ax$.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n\,|f(x)-ax| \leqslant |f(nx-r_n)| + |a||nx-r_n|.$$

$nx - r_n \in [\alpha, \beta]$ et f est bornée sur $[\alpha, \beta]$ donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|f(nx-r_n)| + |a||nx-r_n| \leqslant M.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n\,|f(x)-ax| \leqslant M.$$

$\mathbb{R}$ étant archimédien, nécessairement $f(x) - ax = 0$.
Autrement dit on a démontré dans cette question 8 que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax.$$

si f est additive et bornée sur un segment non trivial alors f est linéaire.

IV D'autres équations fonctionnelles.

9. **Deuxième équation fonctionnelle de Cauchy.**
On se propose de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) \times f(y).$$

Soit f une telle fonction.

(a) Démontrer que $f(0) = 1$ ou que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Déterminons $f(0)$.

En utilisant l'équation fonctionnelle

$$f(0) = f(0)^2$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} f(0)\,(1 - f(0)) &= 0 \\ f(0) = 0 \quad \text{ou} \quad f(0) &= 1 \end{aligned}$$

De plus si $f(0) = 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x+0) \\ &= f(x) \times f(0) \\ &= f(x) \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{f(0) = 1 \text{ ou } f = 0.}$$

(b) On suppose maintenant que f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

i. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $f(x) > 0$.

Démontrons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{2}\right) \times f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.

De plus si f s'annule en un point a alors f est identiquement nulle (si $a \neq 0$ alors $f(x) = f(a)f\left(\frac{x}{a}\right) = 0$). Puisque nous supposons f non identiquement nulle

$$\boxed{f > 0.}$$

ii. Pour tout nombre réel x, on pose $g(x) = \ln(f(x))$. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

Démontrons que, pour tous x et y réels, $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln(f(x+y)) \\ &= \ln(f(x) \times f(y)) \\ &= \ln(f(x)) + \ln(f(y)) \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x + y) = g(x) + g(y).}$$

iii. En déduire qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \exp(ax)$ (où exp désigne la fonction exponentielle réciproque de la fonction logarithme népérien étudiée dans la partie I) et conclure.

Déterminons f.

A. D'après la question précédente g est additive.

B. f est ln étant continues g l'est aussi.

Des points précédents nous déduisons grâce au 5.(d) que g est la fonction affine $g : x \mapsto g(1)x$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
De

$$\ln \circ f(x) = g(1)x,$$

nous déduisons

$$\exp \circ \ln \circ f(x) = \exp(g(1)x).$$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \exp\left(\ln \circ f(1)x\right).$$

Il est clair que réciproquement une telle fonction vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy.

L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ solutions de la deuxième équation fonctionnelle de Cauchy est $\{x \mapsto \exp(ax) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

10. **Équation fonctionnelle de Jensen.**
On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Soit f une telle fonction.

(a) Exprimer la propriété vérifiée par les fonctions qui satisfont l'équation fonctionnelle de Jensen, à l'aide d'une phrase faisant intervenir la notion de *moyenne*.

L'image de la moyenne de deux nombres est la moyenne des images de ces nombres.

(b) Démontrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0).$$

Démontrons l'identité proposée.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(x) = f\left(\frac{x+0}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{f(x)+f(0)}{2} \quad (E_1)$$

De même :

$$f(y) = \frac{f(y)+f(0)}{2} \quad (E_2)$$

En sommant membre à membre (E_1) et (E_2) :

$$f(x)+f(y) = \frac{f(x)+f(y)}{2} + f(0)$$
$$f(x)+f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(0)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)+f(y)-f(0) = f(x+y).}$$

(c) On pose $f(0) = b$. Pour tout nombre réel x, on pose $g(x) = f(x) - b$. Déterminer l'équation fonctionnelle vérifiée par g et résoudre l'équation fonctionnelle de Jensen.

Déterminons l'équation fonctionnelle vérifiée par g.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&f(x)+f(y)-f(0) = f(x+y)\\
&\Leftrightarrow f(x)-b+f(y)-b = f(x+y)-b\\
&\Leftrightarrow g(x)+g(y) = g(x+y)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+y) = g(x)+g(y).}$$

Puisque g, comme f, est continue et est additive, g est linéaire :

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = ax.$$

Donc

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + f(0).$$

Réciproquement toute fonction linéaire est solution de l'équation fonctionnelle de Jensen donc

> L'ensemble des solutions de l'équation fonctionnelle de Jensen est l'ensemble des fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$.

11. On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = f\left(\frac{x^2+16}{2x}\right).$$

Soit f une telle fonction.

(a) On considère les fonctions

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+16}{2x} \end{array}.$$

et

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) - x \end{array}.$$

i. Dresser le tableau de variations de g, déterminer $g(4)$ et préciser les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

Étudions g.

* $g(4) = 4$.
* $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
* $g(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} \frac{4}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty$.
* g est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x\times 2x - (x^2+16)\times 2}{(2x)^2} \\ &= \frac{x^2-16}{2x^2} \\ &= \frac{(x-4)(x+4)}{2x^2} \end{aligned}$$

x	0		4		$+\infty$
g'	$\|$	$-$		$+$	
g	$\|$	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

ii. Étudier le signe de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étudions le signe de h.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$h(x) = \frac{(4-x)(4+x)}{2x}$$

x	0		4		$+\infty$
h	$\|$	$+$	0	$-$	

(b) i. Soient $x \in [4; +\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+16}{2u_n}$.
À l'aide de la question (a), démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

D'après la question 11.(a).ii, puisque $u_0 = x \geqslant 4$, $h(u_0) \leqslant 0$.
Autrement dit $u_0 \geqslant u_1$.

Puisque g est croissante sur $[4, +\infty[$ il est alors aisé de démontré par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Puisque par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 4$, la suite est minorée par 4.

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

De plus, g étant continue, la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $g(\ell) = \ell$.

D'après la question 11.(a).ii g n'admet qu'un point fixe à savoir 4.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4.}$$

ii. En déduire que, pour tout $x \in [4; +\infty[$, on a $f(x) = f(4)$.

Soit $x \in [4, +\infty[$.
$f(x) = f(u_0) = f(g(u_0)) = f(u_1)$
Par une récurrence évidente : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(u_n)$.
Puis, f étant continue, en passant à la limite $f(x) = f(4)$.

$$\boxed{\forall x \in [4, +\infty[,\ f(x) = f(4).}$$

(c) Procéder de manière analogue à la question (b) pour démonter que, pour tout x appartenant à $]0; 4[$, on a $f(x) = f(4)$.

Si $x \in]0; 4[$ alors $u_1 = g(x) \in]4, +\infty[$ et donc on peut construire une suite semblable à la précédente de sorte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 4.

$$\boxed{\forall x \in]0; 4[,\ f(x) = f(4).}$$

(d) Conclure.

Des questions précédents nous déduisons que l'ensemble des fonctions recherchées est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}_+^*$.