Problème 1 : Vrai-Faux

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1 – Une anagramme est un mot obtenu par transposition des lettres d'un autre mot.
Proposition : le nombre d'anagrammes du mot DENOMBRE est 20 160.

2 – Une entreprise comprend 40 femmes et 70 hommes. Le salaire mensuel net moyen dans l'entreprise est de 1900 euros. Celui des hommes est de 2100 euros.
Proposition : dans cette entreprise, le salaire mensuel net moyen des femmes est de 35 % inférieur à celui des hommes.

3 – **Proposition** : le produit de 3 entiers naturels consécutifs est un multiple de 3.

4 – Deux engrenages A et B comportent respectivement 12 et 8 dents. L'engrenage A tourne dans le sens direct. En position initiale, les flèches, marquant un repère, sont décalées de 3 crans.

Proposition : les flèches ne pourront jamais être alignées, quelle que soit la rotation effectuée.

5 – Soit l'équation diophantienne $(E) : 3x - 2y = -1$.
Proposition : les couples de $\mathbb{Z}^2$ solutions de (E) sont tous formés d'entiers relatifs de même signe.

6 – **Proposition** : l'équation $4\sin^2 t - 3 = 0$ a exactement deux solutions dans l'intervalle $[0;2\pi]$.

7 – À tout nombre complexe $z \neq 3$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-5+i}{z-3}$.
Proposition : l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$ est une droite privée d'un point.

8 – Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, on considère les points $E(-1;0)$, $F(5;0)$ et $G(1;4)$.
Proposition : l'orthocentre du triangle EFG est le point $H(1;2)$.

9 – Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on considère :

- le plan (P) de vecteur normal $\vec{n}\,(2;1;2)$ passant par le point $A(0;-1;0)$;
- le plan (Q) d'équation cartésienne $x - 2y + 6z = 0$.

Proposition : les plans (P) et (Q) sont sécants selon une droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(-1;2;0)$.

10 – $ABCD$ est un tétraèdre régulier : les six arêtes ont la même longueur a ($a \in \mathbb{R}^{+*}$). Deux arêtes sont dites opposées lorsqu'elles ne sont pas incluses dans une même face.
Proposition : les arêtes opposées du tétraèdre régulier $ABCD$ sont orthogonales.

11 – **Proposition** : toute suite convergente est monotone.

12 – **Proposition** : toute suite non majorée tend vers $+\infty$.

13 – Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
Proposition : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

14 – Soit f une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[-4;4]$ telle que $f(-4) = -3$ et $f(4) = 2$.
Proposition : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution dans l'intervalle $[-4;4]$.

15 – Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.
Proposition : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

16 – **Proposition** : pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1+a) \leqslant a$.

17 – On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Proposition : pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

18 – Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 5y = 1$.
Proposition : si les fonctions y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle (E), alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution de l'équation différentielle (E).

19 – Soit la proposition p : « $ABCD$ est un rectangle » et la proposition q : « $ABCD$ est un quadrilatère ayant ses diagonales de même longueur ».
Proposition : $q \Longrightarrow p$.

20 – On considère la fonction Python Seuil :

```
def Seuil(s) :
      n = 0
      u = 0.25
      v = 0.75
      while u < s :
            u = 0.9*u+0.2*v
            v = 1-u
            n = n+1
      return n
```

Proposition : la valeur renvoyée par la commande Seuil(0.6) est le nombre 5.

Problème 2 : lieu géométrique, fonction

Ce problème est constitué de deux parties indépendantes.

I - Lieu géométrique

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $J(0;1)$ et $P(0;2)$, le cercle(C) de centre J et de rayon 1 et la droite (d) d'équation $y = 2$.

Soit $A(x_A; y_A)$ un point sur le cercle (C) privé de O, l'origine du repère.
On note :

- N le point d'intersection de la demi-droite $[OA)$ et de la droite (d).
- (Δ_A) la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par A.
- (Δ_N) la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par N.
- $M\left(x_M; y_M\right)$ le point d'intersection des droites (Δ_A) et (Δ_N).

1 – Démontrer que $x_A^2 + (y_A - 1)^2 = 1$ et $(x_A; y_A) \neq (0;0)$.

2 – Démontrer que $2x_A = x_M y_M$.

3 – En déduire que $x_M^2 y_M^2 + 4y_M^2 - 8y_M = 0$ puis que $y_M = \dfrac{8}{x_M^2 + 4}$.

Le lieu géométrique du point M lorsque le point A décrit le cercle (C) privé de O est appelé "sorcière d'Agnési".

II - Étude de fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ et (Γ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1 – Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et étudier sa parité .

2 – Démontrer que la courbe (Γ) admet une unique asymptote que l'on déterminera.

3 – Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4 – Étudier la convexité de la fonction f.

5 – Représenter la courbe (Γ) dans un repère orthonormé du plan.

6 – Déterminer l'aire totale comprise entre l'axe des abscisses et la courbe (Γ).

Indication : la fonction arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Problème 3 : suites

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad .$$

1 – Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{k}$.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

2 – Étude de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.

(c) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

(d) On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi^2}{6}$. Écrire un algorithme qui calcule v_{1000}.

(e) L'exécution d'un algorithme calculant v_{1000} donne :

```
1.6439345666815615
```

Préciser le nombre de décimales de π obtenues par ce calcul.

3 – Étude de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(a) Démontrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

(b) La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la constante d'Apéry notée $\zeta(3)$ du nom du mathématicien qui a démontré son irrationalité en 1978.

$$\zeta(3) \approx 1{,}202\,056\,903\,16$$

Que signifie "$\zeta(3)$ est irrationnelle" ?

(c) On considère le nombre $\beta = \dfrac{\pi^3}{\sqrt[6]{294\,542\,216}}$, on a $\beta \approx 1{,}202\,056\,901\,98$.
Écrire un algorithme qui permet de justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers β.

Problème 4 : moyennes

Soient x et y deux nombres réels tels que : $0 < x < y$.

1 – Un cycliste effectue une montée de 10 km à une vitesse moyenne de 10 km/h, puis effectue la descente (sur le même trajet de 10 km) à la vitesse moyenne de 30 km/h.

   (a) Quelle est la vitesse moyenne du cycliste sur l'ensemble du parcours ?

   (b) Exprimer, en fonction de x et de y, la vitesse moyenne du cycliste sur le parcours lorsque la vitesse moyenne est de x km/h lors de la montée et de y km/h lors de la descente.

2 – Soit un rectangle de côtés x et y et un carré de côté c, où $c \in \mathbb{R}^{*+}$.
Exprimer c en fonction de x et de y dans chacun des cas suivants :

   (a) Le carré et le rectangle ont le même périmètre.

   (b) Le carré et le rectangle ont la même aire.

   (c) Le carré et le rectangle ont des diagonales de même longueur.

   (d) Le rapport des aires est égal au rapport des périmètres.

3 – Soit un demi-cercle de centre O et de diamètre $[AC]$ tel que $AC = x + y$.
B est le point du segment $[AC]$ tel que $AB = x$.
D est le point du demi-cercle qui se projette orthogonalement en B sur $[AC]$ et K le projeté orthogonal de B sur $[OD]$.
Exprimer OD, DB et DK en fonction de x et de y.

4 – On donne les définitions de différentes moyennes de x et de y :

- $a = \dfrac{x+y}{2}$ est la moyenne arithmétique de x et de y.
- $g = \sqrt{xy}$ est la moyenne géométrique de x et de y.
- $h = \dfrac{2xy}{x+y}$ est la moyenne harmonique de x et de y.
- $q = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ est la moyenne quadratique de x et de y.

Démontrer les propriétés suivantes :

   (a) a, g, h et q sont des réels strictement positifs.

   (b) $a^2 - g^2 = \dfrac{(x-y)^2}{4}$.

   (c) $g = \sqrt{ah}$.

   (d) Le logarithme de la moyenne géométrique de deux nombres strictement positifs est la moyenne arithmétique des logarithmes de ces deux nombres.

5 – Démontrer l'inégalité des moyennes : $x < h < g < a < q < y$.

6 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et u_{n-1}, u_n, u_{n+1} trois termes consécutifs d'une suite à termes strictement positifs.
Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et u_{n+1} lorsque :

   (a) La suite est arithmétique.

   (b) La suite est géométrique.