

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1 : VRAI - FAUX

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.

I. Ensembles de nombres

1. Tout entier relatif non nul possède un inverse dans \mathbb{Z} pour la multiplication.
2. La somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal.
3. $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.
4. $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.
5. Pour tout n dans \mathbb{N} , \sqrt{n} est un nombre irrationnel.
6. La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
7. La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

II. Géométrie dans le plan

8. Dans un plan muni d'un repère cartésien, $2x = 3$ est l'équation d'une droite.
9. Dans un plan euclidien muni d'un repère orthonomé, on considère les points $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(1, -1)$, $D(4, 5)$.
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
10. Dans un plan euclidien, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$. Soit le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. Alors $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$.

III. Géométrie dans l'espace

On se place dans l'espace, muni d'un repère cartésien.

11. Si deux droites D et D' sont parallèles à un même plan P , alors D est parallèle à D' .
12. $2x + 3y = 3$ est l'équation d'une droite.
13. La droite Δ définie par le système d'équations
$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$
 - a. passe par le point A de coordonnées $(1, 0, 1)$,
 - b. a comme vecteur directeur le vecteur \vec{u} de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - c. est contenue dans le plan P d'équation $3x + 4y - z = 2$.

IV. Matrices

14. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ont le même rang.
15. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.
16. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
17. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

V. Suites

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels.

18. Si elle est décroissante et minorée par 0 alors elle converge vers 0.
19. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent alors $(u_n)_n$ converge.

VI. Probabilités

Un élève répond au hasard aux cinq questions d'un questionnaire de type «VRAI - FAUX».

20. La probabilité qu'il ait cinq réponses correctes est égale à $\frac{1}{32}$.
21. La probabilité qu'il ait exactement trois réponses correctes est égale à $\frac{10}{32}$.
22. Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse aucun. La note moyenne à laquelle il peut prétendre est 2,5 sur 5.

VII. Arithmétique

23. Si trois nombres entiers relatifs a, b, c sont tels que a et b divisent c , alors ab divise c .
24. Si trois nombres entiers relatifs a, b, c sont tels que a divise b et c , alors bc est un multiple de a .
25. $19x \equiv 3 \pmod{53}$ admet des solutions dans \mathbb{Z} .

Problème n° 2 : convexité

Notations

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels.

\mathbb{N}^* désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.

\mathbb{Q} désigne l'ensemble des nombres rationnels.

\mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels.

\mathbb{R}_+ désigne l'ensemble des nombres réels positifs.

\mathbb{R}_+^* désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Dans ce sujet, I et J désignent des intervalles de \mathbb{R} , non vides et non réduits à un point.

Soit f une fonction, à valeurs dans \mathbb{R} , définie sur I .

On rappelle que f est dite convexe sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad \text{Inégalité de convexité } (\star).$$

On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I .

I. Préliminaires

Soit f une fonction, à valeurs dans \mathbb{R} , définie sur I .

1. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est croissante sur I .
2. Traduire à l'aide de quantificateurs que f n'est pas croissante sur I .
3. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est une fonction affine sur I .
4. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est continue en un point a de I .

II. Quelques propriétés et exemples

5. Écrire une inégalité, analogue à (\star) , caractérisant une fonction concave sur I .
6. **Caractérisation graphique de la convexité.**
 - a. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. Démontrer que $z \in [x; y]$ si et seulement si il existe $\lambda \in [0; 1]$ tel que $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.
 - b. Sans démonstration, illustrer l'inégalité de convexité (\star) par une figure.
7. **Opérations et convexité.**
 - a. Soient f et g des fonctions convexes sur I . Démontrer que $f + g$ est convexe sur I .
 - b. Soient f une fonction convexe sur I à valeurs dans J et g une fonction convexe et croissante sur J . Démontrer que $g \circ f$ est convexe sur I .
 - c. Sans démonstration, énoncer une propriété du même type qui permettrait de conclure que $g \circ f$ est concave.

8. Quelques exemples.

L'étude des exemples qui suivent prendra appui sur la définition de la convexité et sur les résultats précédemment démontrés.

a. Démontrer que la fonction valeur absolue est convexe sur \mathbb{R} .

b. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbb{R} .

c. On cherche à démontrer que la fonction \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x < y$. On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par

$$\forall t \in [0; 1], g(t) = \ln(tx + (1-t)y) - t \ln(x) - (1-t) \ln(y).$$

i. Étudier la monotonie de la fonction g' , dérivée de g , sur $[0; 1]$.

ii. Démontrer que :

$$\frac{1}{y} \leq \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y} \leq \frac{1}{x}.$$

iii. En déduire le signe de $g'(0)$ et de $g'(1)$.

iv. Déduire des questions précédentes que g' s'annule une unique fois sur $[0; 1]$.

v. Déterminer le signe de g sur $[0; 1]$ et conclure.

9. Généralisation de l'inégalité de convexité.

Soit f une fonction convexe sur I .

Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels

que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in I$$

et

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

10. Deux applications.

a. À l'aide de la concavité de \ln , démontrer que pour tout $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on a

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

b. Démontrer que $\ln \circ \ln$ est concave sur $]1, +\infty[$.

En déduire que pour tout $(x, y) \in]1, +\infty[^2$, on a

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

III. Inégalités des trois pentes et conséquences

Soit f une fonction, à valeurs dans \mathbb{R} , définie sur I .

Pour tout $a \in I$, on considère la fonction $\Delta_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{cases}$

- 11. a.** On suppose dans cette question que la fonction f est convexe sur I . Soient $a \in I$ et $(t, u) \in (I \setminus \{a\})^2$ tel que $t < u$.
- i.** On suppose que $t < u < a$. D'après la question **6.a.**, on sait qu'il existe $\lambda \in]0; 1[$ tel que $u = \lambda t + (1 - \lambda)a$.
Démontrer que $f(u) - f(a) \leq \lambda(f(t) - f(a))$ puis que $\Delta_a(t) \leq \Delta_a(u)$.
 - ii.** On admet que cette dernière inégalité reste vraie pour $a < t < u$ et pour $t < a < u$. Que peut-on en déduire pour Δ_a ?
- b.** On suppose dans cette question que, pour tout $a \in I$, Δ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$. Soient $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $\lambda \in [0; 1[$.
- i.** Démontrer que $\Delta_x(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \Delta_x(y)$.
 - ii.** En déduire que f est convexe sur I .
- c.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur Δ_a pour que f soit convexe sur I .

On suppose dans la suite de cette partie III que la fonction f est convexe sur I .

- 12.** Soit $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < b < c$.
- a.** En utilisant la question **11**, démontrer l'inégalité des trois pentes :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

- b.** Illustrer cette inégalité par une figure.

- 13. a. Théorème de la limite monotone.**

Soit φ une fonction croissante sur l'intervalle $]a; b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.

- i.** Démontrer que si φ est majorée alors elle admet une limite finie à gauche en b , égale à la borne supérieure de l'ensemble $\{\varphi(x) ; x \in]a, b[\}$.
 - ii.** Sans démonstration, que peut-on dire si φ est minorée ?
- b.** Soit $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < b < c$.
- i.** En appliquant le théorème de la limite monotone à Δ_b , démontrer que f est dérivable à gauche et à droite en b et que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b) \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

- ii.** Montrer que f est continue en b .
- c.** Donner un exemple d'une fonction convexe et non continue sur un intervalle.

IV. Caractérisation des fonctions convexes dérivables

Soit f une fonction dérivable sur I . On note f' sa fonction dérivée sur I .

14. Dans cette question, on suppose f convexe sur I .

a. Montrer que pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$, on a

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b),$$

et en déduire que f' est croissante.

b. Justifier que la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

15. Dans cette question, on suppose f' croissante sur I .

Soit $(x, y) \in I$ tel que $x < y$. On considère la fonction ϕ définie sur $[0; 1]$ par

$$\forall t \in [0; 1], \phi(t) = tf(x) + (1 - t)f(y) - f(tx + (1 - t)y).$$

a. Démontrer que ϕ est dérivable sur I et déterminer sa dérivée ϕ' .

b. En utilisant le théorème des accroissements finis pour f entre x et y , démontrer qu'il existe $\gamma \in]0; 1[$ tel que pour tout $t \in [0; 1]$,

$$\phi'(t) = (x - y)(f'(\gamma x + (1 - \gamma)y) - f'(tx + (1 - t)y)).$$

c. En déduire les variations de ϕ .

d. En déduire que la fonction f est convexe sur I .

16. Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur I est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I .

V. Différentes inégalités

17. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave.

On définit la fonction $\psi : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & yf\left(\frac{x}{y}\right) \end{cases}$

a. Démontrer que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$, on a

$$\psi(x_1, y_1) + \psi(x_2, y_2) \leq \psi(x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$, on a

$$\sum_{k=1}^n \psi(x_k, y_k) \leq \psi\left(\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n y_k\right) \quad (**).$$

18. **Application.**

Soient $p, q \in]1; +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dans cette question, $f : t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$

a. Démontrer que f est concave sur \mathbb{R}_+^* .

b. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$.

En utilisant (**), démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$