Capes de mathématique 2022 épreuve 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Problème n° 1 : vrai-faux.

I Ensembles de nombres.

1. L'assertion est fausse.

Il s'agit de démontrer qu'une propriété universelle est fausse : il suffit d'exhiber un contre-exemple.

L'inverse de 2, $\frac{1}{2}$, n'est pas un entier (fraction irréductible).

2. L'assertion est vraie.

Il faut ici démontrer que la propriété universelle est vraie. Donc dans tous les cas.

Soient x et y deux nombres décimaux.
Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x = \frac{a}{10^n}$ et $y = \frac{b}{10^m}$.
Donc

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^m} \\ &= \frac{a \times 10^m + b \times 10^n}{10^n \times 10^m} \\ &= \frac{a \times 10^m + b \times 10^n}{10^{n+m}} \end{aligned}$$

Comme $a \times 10^m + b \times 10^n \in \mathbb{Z}$ et $n + m \in \mathbb{N}$, $x + y$ est bien décimal.

3. L'assertion est fausse.

Démontrons que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal en raisonnant par l'absurde.

Supposons que $\frac{1}{3}$ est décimal.

Autrement dit : $\exists (a,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},\ \frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.
Nous en déduisons (produit en croix) :

$$10^n = 3a$$

Or les diviseurs premiers de 10 sont 2 et 5 donc 10^n n'est pas divisible par 3 ce qui est contradictoire avec la précédente égalité.

Nous avons démontré par l'absurde que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

4. L'assertion est vraie.

Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.
Autrement dit il existe a et b des entiers naturels premiers entre eux tels que : $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$.
Nous en déduisons : $5b^2 = a^2$. Donc $5|a^2$ et enfin $5|a$.
Ainsi : $\exists a' \in \mathbb{N},\ a = 5a'$.
Donc :

$$5b^2 = 5^2 a'^2$$
$$b^2 = 5a'^2$$

Puis $5|b^2$ et donc $5|b$.

Chemin faisant nous avons établi que a et b sont divisibles par 5.
Ceci contredit le fait que a et b aient été choisis premiers entre eux.

Nous avons démontré par l'absurde que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

5. L'assertion est fausse.

En effet : $\sqrt{0} = 0 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6. L'assertion est fausse.

En effet : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont irrationnels et pourtant $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0 \in \mathbb{Q}$.

7. L'assertion est vraie.

Soient $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démontrons que $x + y$ est irrationnel en raisonnant par l'absurde.

Supposons que $x + y \in \mathbb{Q}$.
$x \in \mathbb{Q}$ donc : $\exists (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $x = \frac{a}{b}$.
$x + y \in \mathbb{Q}$ donc : $\exists (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $x + y = \frac{c}{d}$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + y &= \frac{c}{d} \\ y &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \\ y &= \frac{cb - ad}{bd} \end{aligned}$$

Puisque $cb - ad \in \mathbb{Z}$ et $bd \in \mathbb{N}^*$, $\frac{cb-ad}{bd} \in \mathbb{Q}$. Autrement dit $y \in \mathbb{Q}$.
Ceci contredit le fait que y est irrationnel.

Nous avons démontré en raisonnant par l'absurde que $x + y$ est irrationnel.

II Géométrie dans le plan.

8. L'assertion est vraie.

Le niveau des questions étant élémentaire j'ai du mal à voir une justification élémentaire convenant.

Il s'agit d'une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses et passant par les points d'abscisses $\frac{3}{2}$.

9. L'assertion est vraie.

$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si le produit scalaire (euclidien usuel dans un repère orthonormé du plan) de leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est nul. Or d'une part $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'autre part $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= -2 \times 3 + 1 \times \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $(AB) \parallel (CD)$.

10. L'assertion est

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Si les produit scalaire et normes sont ceux usuels dans le plan :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|^2 + 0 \\ &= \frac{1}{2} \times 4^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 8.}$$

III Géométrie dans l'espace.

11. L'assertion est fausse.

Exhibons un contre-exemple.
Soient $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan vectoriel directeur de P et $A \in P$.
Notons D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{i}$, D' celle passant par A et de vecteur directeur $\vec{j}$.
Par construction $D \subset P$ et $D' \subset P$ donc en particulier D et D' sont parallèles à P.
Par contre $(\vec{i},\vec{j})$ est libre puisque c'est une base. Autrement dit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires. Et par conséquent D et D' sont sécantes et non pas parallèles.

12. $\boxed{\text{L'assertion est fausse.}}$

$A(0,1,1)$, $B(0,1,2)$ et $C\left(\frac{3}{2},0,2\right)$ appartiennent à l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions de l'équation proposée.

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-1\\0\end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires par exemple $\begin{vmatrix}0 & \frac{3}{2}\\0 & -1\end{vmatrix} = 0$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

13. (a) $\boxed{\text{Assertion vraie.}}$

D'une part : $1+2\times 0+1 = 2$ et d'autre part : $1+0-1 = 0$ donc $A \in \Delta$.

(b) $\boxed{\text{L'assertion est fausse.}}$

Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de Δ.

Supposons que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ.
Remarquons que Δ est l'intersection des plans $P_1 : \ x+2y+z=2$ et $P_2 : \ x+y-z=0$.

Notons $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2$ est l'équation du plan P_1. Donc $\vec{u}$ est orthogonal à P_1. Donc Δ est orthogonale à P_1 ce qui contredit le fait que $\Delta \subset P_1$.

(c) $\boxed{\text{L'assertion est vraie.}}$

Soit $M(x,y,z) \in \Delta$.
On a donc :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 & L_1 \\ x + y - z = 0 & L_2 \end{cases}$$

En faisant $L_1 + 2L_2$ on obtient

$$3x + 4y - z = 2.$$

Autrement dit si $M \in \Delta$ alors $M \in P$.

$$\boxed{\Delta \subset P.}$$

IV Matrices.

14. $\boxed{\text{L'assertion est vraie.}}$

Dans $\mathbb{R}^2$ le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul et clairement lié à lui même donc la famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ a un rang de 1.
De même $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ a un rang de 1.

15. $\boxed{\text{L'assertion est fausse.}}$

Deux matrices semblables ont nécessairement la même trace ce qui n'est pas le cas ici.

16. $\boxed{\text{L'assertion est fausse.}}$

Notons M la matrice proposée.

$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$ donc 1 est la seule valeur propre et sa multiplicité est 2.

$M - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 1. Par conséquent, d'après le théorème du rang, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M - I_2$ a un noyau de dimension 1. Autrement dit, le sous-espace propre associé à la valeur propre de 1 de M est de dimension 1.

Puisque cette dimension n'égale pas la multiplicité de la valeur propre, M n'est pas diagonalisable.

17. L'assertion est vraie.

Notons M la matrice proposée.

$\chi_M(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)$. Ce polynôme caractéristique étant scindé simple dans $\mathbb{R}$, M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

V Suites.

18. L'assertion est fausse.

La suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante minorée par 0 est pourtant elle converge vers 1.

19. L'assertion est fausse.

Il faudrait que les deux suites extraites aient la même limite.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \equiv 0 \pmod 2 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

$(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent alors que $(u_n)_n$ diverge.

VI Probabilités.

20. L'assertion est vraie.

En notant X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonne réponses, il est raisonnable de modéliser par une loi binomiale la situation décrite : $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5,\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=5) &= \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= \frac{1}{2^5} \\ &= \frac{1}{32}\end{aligned}$$

21. L'assertion est vraie.

De même :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=3) &= \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2} \\ &= \frac{5\times 4}{2}\cdot\frac{1}{2^5} \\ &= \frac{10}{32}\end{aligned}$$

22. L'assertion est vraie.

Avec les notations des questions précédentes, puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5,\frac{1}{2}\right)$: $\mathbb{E}(X) = 5\times\frac{1}{2} = 2{,}5$.

VII Arithmétique.

23. L'assertion est fausse.

Avec $a=4$, $b=6$ et $c=12$, on a $a|c$, $b|c$ et pourtant $ab \nmid c$ car $0 \leqslant c < ab$.

24. L'assertion est vraie.

a divise b donc : $\exists d \in \mathbb{Z}$, $b = ad$.
Donc : $bc = adc$, et par conséquent bc est un multiple de a.

25. L'assertion est vraie.

$19 \wedge 53 = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, il existe $(p,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $19p + 53n = 1$.
Donc : $19 \times (3p) + 53 \times (3n) = 3$.
Ainsi $3p$ est solution de $19x \equiv 3\ [53]$.
Il est immédiat alors que $19 \times (3x - 53) + 53 \times (3x + 19) = 3$ donc $3x - 53$ est aussi une solution de $19x \equiv 3\ [53]$ distincte de $3x$.

Problème n° 2 : convexité.

I Préliminaires.

1. $$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

2. En notant $\wedge$ le connecteur logique « et » :
$$\exists (x,y) \in I^2,\ [x < y] \wedge [f(x) > f(y)].$$

3. En utilisant la caractérisation avec le taux d'accroissement) (taux de variation) :
$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in I^2,\ x \neq y \Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = m.$$

4. $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y) < \varepsilon.$$

II Quelques propriétés et exemples.

5. f est concave sur I si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0;1],\ -f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant -\lambda f(x) - (1-\lambda)f(y).$$

Ce qui équivaut à

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0;1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).}$$

6. (a) Démontrons l'existence et l'unicité de l'écriture proposée pour z.

Considérons $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ \nu & \mapsto & (x-y)\nu + y \end{array} \right.$ qui est une fonction affine strictement décroissante donc bijective de $[0;1]$ sur $\varphi([0;1])$.
Comme φ est strictement décroissante et continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi([0;1]) = [\varphi(1); \varphi(0)]$.
Ainsi $\tilde{\varphi} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & [x;y] \\ \nu & \mapsto & (x-y)\nu + y \end{array} \right.$ est une bijection.
Nous en déduisons que

$$\boxed{z \in [x,y] \text{ si et seulement si il existe un unique } \lambda \in [0;1] \text{ tel que } z = \lambda x + (1-\lambda)y.}$$

Démontrons l'équivalence par double implication.

* Supposons que $z \in [x;y]$.

$$\begin{aligned} z &= \frac{y-x}{y-x}(z-x) + x \\ &= \frac{z-x}{y-x}y - \frac{z-x}{y-x}x + x \end{aligned}$$

En posant $\mu = \frac{z-x}{y-x}$:

$$z = \mu y + (1-\mu)x$$

Or

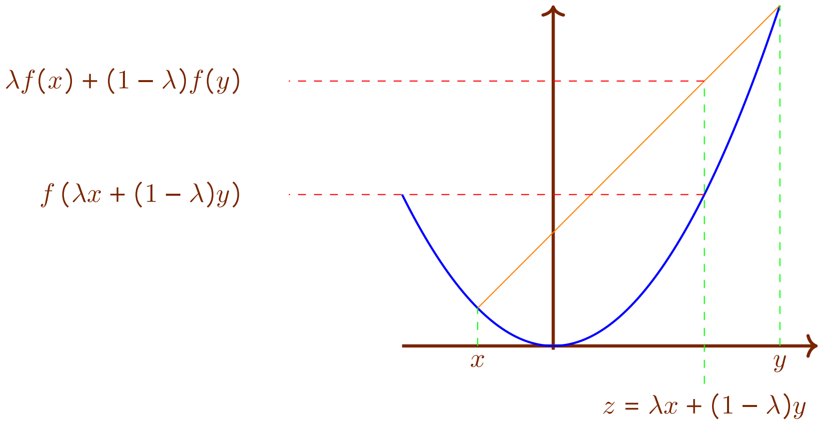
$$\begin{aligned}
&x \leqslant z \leqslant y\\
&0 \leqslant z - x \leqslant y - x\\
&0 \leqslant \frac{z-x}{y-x} \leqslant 1
\end{aligned}$$

donc, notant $\lambda = 1 - \mu$ nous avons bien : $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ avec $\lambda \in [0;1]$.

* Supposons maintenant qu'il existe $\lambda \in [0;1]$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.
$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ \nu & \mapsto & (x-y)\nu + y \end{array} \right.$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est négatif donc elle est décroissante sur $[0;1]$.
Par conséquent : $\forall \nu \in [0;1]$, $\varphi(0) \geqslant \varphi(\nu) \geqslant \varphi(1)$.
Autrement dit : $\forall \nu \in [0;1]$, $y \geqslant (x-y)\nu + y \geqslant x$.
En particulier : $y \geqslant (x-y)\lambda + y \geqslant x$.
Où encore :

Nous avons démontré par double implication que $z \in [x;y]$ si et seulement si $\exists \lambda \in [0;1]$, $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

(b)



7. (a) Soit $(x,y,\lambda) \in I^2 \times [0,1]$.
Par convexité de f et de g :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \end{array} \right.$$

En sommant terme à terme les deux inégalités :

$$\begin{aligned}
f(\lambda x+(1-\lambda)y)+g(\lambda x+(1-\lambda)y) &\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\\
&\quad \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\\
[f+g](\lambda x+(1-\lambda)y) &\leqslant \lambda\left[f(x)+g(x)\right]+\\
&\quad (1-\lambda)\left[f(y)+g(y)\right]\\
[f+g](\lambda x+(1-\lambda)y) &\leqslant \lambda[f+g](x)+(1-\lambda)[f+g](y)
\end{aligned}$$

L'inégalité de convexité est vérifiée pour tout $(x,y,\lambda)\in I^2\times[0,1]$ donc

$$\boxed{f+g \text{ est convexe sur } I.}$$

(b) Soit $(x,y,\lambda)\in I^2\times[0,1]$.
f étant convexe :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

g étant croissante :

$$g\left[f(\lambda x+(1-\lambda)y)\right]\leqslant g\left[\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\right]$$

g étant convexe :

$$\begin{aligned}
g\circ f(\lambda x+(1-\lambda)y) &\leqslant \lambda g\left[f(x)\right]+(1-\lambda)g\left[f(y)\right]\\
g\circ f(\lambda x+(1-\lambda)y) &\leqslant \lambda g\circ f(x)+(1-\lambda)g\circ f(y)
\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{g\circ f \text{ est convexe sur } I.}$$

(c) $\boxed{\text{Si } f \text{ est concave sur } I \text{ à valeurs dans } J \text{ et } g \text{ est concave et croissante sur } J, \text{ alors } g\circ f \text{ est concave sur } I.}$

8. (a) Soit $(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]$.
D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|\lambda x + (1-\lambda)y| &\leqslant |\lambda x| + |(1-\lambda)y| \\ &\leqslant |\lambda| \cdot |x| + |1-\lambda| \cdot |y| \\ &\leqslant \lambda|x| + (1-\lambda)|y|\end{aligned}$$

La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]$.

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leqslant \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}&0 \leqslant \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\ &0 \leqslant \lambda x^2 - \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)y^2 - (1-\lambda)^2 y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy \\ &0 \leqslant \lambda(1-\lambda)x^2 + \lambda(1-\lambda)y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy \\ &0 \leqslant x^2 + y^2 - 2xy, \text{ car } \lambda(1-\lambda) \geqslant 0 \\ &0 \leqslant (x-y)^2\end{aligned}$$

Nous avons raisonné par équivalence et la dernière inégalité est clairement toujours vraie donc l'inégalité de convexité est vérifiée.

La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.

(c) i. g est dérivable sur $[0;1]$ car si $(x,y,t) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \times [0;1]$ alors $tx + (1-t)y \in [x,y] \subset \mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $t \in [0;1]$

$$g'(t) = \frac{x-y}{tx + (1-t)y} - \ln(x) + \ln(y)$$

$t \mapsto tx + (1-t)y$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est $x - y$. Or par hypothèse $x - y < 0$ donc $t \mapsto tx + (1-t)y$ est strictement décroissante.

D'où, la fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{1}{tx+(1-t)y}$ est strictement croissante sur $[0;1]$.

Enfin, puisque $x - y < 0$, $t \mapsto \frac{x-y}{tx+(1-t)y} - \ln(x) + \ln(y)$ est strictement décroissante sur $[0;1]$.

$$\boxed{g' \text{ est strictement décroissante sur } [0;1].}$$

ii. Notons $z = \frac{x}{y}$. Remarquons que $z \in]0;1]$.

$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y} \leqslant \frac{1}{x}$$

équivaut successivement à :

$$\frac{x-y}{y} \geqslant \ln(x) - \ln(y) \geqslant \frac{x-y}{x}, \quad \text{car } x - y < 0$$

$$\frac{x}{y} - 1 \geqslant \ln\left(\frac{x}{y}\right) \geqslant 1 - \frac{y}{x}.$$

L'encadrement à démontrer est équivalent à :

$$z - 1 \geqslant \ln(z) \geqslant 1 - \frac{1}{z}.$$

Démontrons $z - 1 \geqslant \ln(z) \geqslant 1 - \frac{1}{z}$.

* $h : \left\{ \begin{array}{ccc}]0;1] & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \ln(z) - z + 1 \end{array} \right.$ est dérivable et $h'(z) = \frac{(1-z)(1+z)}{z}$.
  Ainsi $h' \geqslant 0$ sur $]0;1]$ et h est croissante sur ce même intervalle.
  Comme de plus $h(1) = 0$ nous en déduisons : $h \leqslant 0$ sur $]0;1]$.
  Nous en déduisons : $z - 1 \geqslant \ln(z)$.
* De même $\ell : z \mapsto \ln(z) - 1 + \frac{1}{z}$ et dérivable sur $]0;1]$ et $\ell'(z) = \frac{z-1}{z^2}$.
  Donc ℓ est décroissante sur $]0;1]$. Comme de plus $\ell(1) = 0$, nous avons : $\ell \geqslant 0$ sur $]0;1]$. Nous avons démontré que $\ln(z) \geqslant 1 - \frac{1}{z}$.

$$\boxed{\text{Ainsi pour tout } z \in]0;1],\ z - 1 \geqslant \ln(z) \geqslant 1 - \frac{1}{z}.}$$

iii. * Étudions le signe de $g^{'}(0)$.

$$\begin{aligned} g^{'}(0) &= \frac{x-y}{y} - \ln(x) + \ln(y) \\ &= (x-y)\left(\frac{1}{y} - \frac{\ln(x)-\ln(y)}{x-y}\right) \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente,

$$\frac{1}{y} - \frac{\ln(x)-\ln(y)}{x-y} \leqslant 0$$

et par construction $x-y<0$ donc

$$\boxed{g^{'}(0) \leqslant 0.}$$

* En procédant de même :

$$\boxed{g^{'}(1) \geqslant 0.}$$

iv. $g^{'}$ est continue, car dérivable, sur $[0;1]$, $g^{'}(0) \leqslant 0 \leqslant g^{'}(1)$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in [0;1],\ g^{'}(t) = 0.$$

Comme de plus $g^{'}$ est strictement décroissante, elle est injective et α est donc unique.

$$\boxed{\exists! \alpha \in [0;1],\ g^{'}(\alpha) = 0.}$$

v. De la stricte décroissance de $g^{'}$ et de la question précédente nous déduisons le tableau de variation :

x	0		α		1
$g^{'}$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

Nous en déduisons :

$$\boxed{g \geqslant 0 \text{ sur } [0;1].}$$

Soit $t \in [0;1]$.

$$\begin{aligned} g(t) \geqslant 0 &\iff \ln\left(tx + (1-t)y\right) - t\ln(x) - (1-t)\ln(y) \geqslant 0 \\ &\iff \ln\left(tx + (1-t)y\right) \geqslant t\ln(x) + (1-t)\ln(y) \end{aligned}$$

Ainsi $-\ln$ vérifie $(\star)$.
Autrement dit :

$$\boxed{\ln \text{ est concave.}}$$

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ l'assertion suivante : $\forall (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in I^n$, $\forall (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I \\ f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \end{cases}$$

Démontrons par récurrence sur n que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

* Justifions que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
  Soit $(\lambda_1,x_1) \in \mathbb{R}_+ \times I$.
  De $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ on déduit $\lambda_1 = 1$.
  - D'une part, on a donc $\lambda_1 x_1 = x_1 \in I$.
  - Et d'autre part, on a $f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1)$ et donc $f(\lambda_1 x_1) \leqslant \lambda_1 f(x_1)$.
* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est alors nécessairement vraie.
  Soient $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1},) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$.
  - Remarquons tout d'abord que si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $(x,y) \in I^2$ avec $x \leqslant y$ alors,

    $$x \leqslant \lambda x + (1-\lambda)y \leqslant y.$$

    Autrement dit, puisque I est un intervalle,

    $$\lambda x + (1-\lambda)y \in I.$$

Notons $\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. Comme $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} = 1$ et que $(x_1, \dots x_n) \in I^n$, nous en déduisons, d'après l'hypothèse de récurrence : $x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} x_k \in I$.

$\mu \in \mathbb{R}_+$ et $(x, x_{n+1}) \in I^2$, donc, d'après notre remarque liminaire : $\mu x + (1-\mu)x_{n+1} \in I$.
Autrement dit : $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \in I$.

- En gardant les notations précédentes, et puisque f est convexe :

$$f\left(\mu x + (1-\mu)x_{n+1}\right) \leqslant \mu f(x) + (1-\mu) f(x_{n+1})$$

Autrement dit :

$$f\left(\mu x + (1-\mu)x_{n+1}\right) \leqslant \mu f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$f\left(\mu x + (1-\mu)x_{n+1}\right) \leqslant \mu f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Enfin :

$$f\left(\mu x + (1-\mu)x_{n+1}\right) \leqslant f \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Nous avons établi que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

10. (a)

$$\begin{aligned} \ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) &= \ln\left((abc)^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= \frac{\ln(a) + \ln(b) + \ln(c)}{3} \end{aligned}$$

La fonction logarithme étant concave :

$$\ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) \leqslant \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

La fonction exponetielle étant croissante :

$$\exp \circ \ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) \leqslant \exp \circ \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$$\boxed{\sqrt[3]{abc} \leqslant \tfrac{a+b+c}{3}.}$$

(b) ln est concave sur $]1,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et croissante donc, d'après la question 7.c

$$\boxed{\ln \circ \ln \text{ est concave.}}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
\ln \circ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) &\geqslant \frac{\ln \circ \ln(x) + \ln \circ \ln(y)}{2} \\
\ln \circ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) &\geqslant \frac{1}{2}\ln\left[\ln(x)\ln(y)\right] \\
\ln \circ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) &\geqslant \ln\left[\left(\ln(x)\ln(y)\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
\ln \circ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) &\geqslant \ln\left[\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right]
\end{aligned}$$

Puis exponentielle étant croissante :

$$\exp \circ \ln \circ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \exp \circ \ln\left[\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right]$$

$$\boxed{\ln\left(\tfrac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.}$$

III Inégalité des trois pentes et conséquences.

11. (a) i.

$$f(u) - f(a) = f(\lambda t + (1-\lambda)a) - f(a)$$

Puisque f est convexe :

$$\begin{aligned} f(u) - f(a) &\leqslant \lambda f(t) + (1-\lambda) f(a) - f(a) \\ &\leqslant \lambda \left(f(t) - f(a)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(u) - f(a) \leqslant \lambda \left(f(t) - f(a)\right).}$$

De : $u < a$ nous déduisons : $u - a < 0$.
Et donc :

$$\begin{aligned} \frac{f(u)-f(a)}{u-a} &\geqslant \lambda \frac{f(t)-f(a)}{u-a} \\ &\geqslant \lambda \frac{f(t)-f(a)}{\lambda t + (1-\lambda)a} \\ &=\geqslant \lambda \frac{f(t)-f(a)}{\lambda(t-a)} \\ &\geqslant \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\Delta_a(u) \geqslant \Delta_a(t).}$$

ii. Ainsi : $\forall (t,u) \in (I \setminus \{a\})^2,\ (t < u) \Rightarrow \Delta_a(t) < \Delta_a(u)$.
Autrement dit :

$$\boxed{\Delta_a \text{ est croissante sur } I \setminus \{a\}.}$$

(b) i. Puisque $x < y$ et $\lambda \in [0;1[$, $x < \lambda x + (1-\lambda)y \leqslant y$.
Δ_x étant croissante sur $I \setminus \{x\}$ nous en déduisons :

$$\boxed{\Delta_x(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \Delta_x(y).}$$

ii. D'après la question précédente et dans les mêmes conditions (notamment $x < y$) :

$$\begin{aligned}
\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{\lambda x + (1-\lambda)y - x} &\leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\
\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} &\leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\
f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x) &\leqslant (f(y) - f(x))(1-\lambda) \\
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leqslant f(x) - (1-\lambda)f(x) + f(y)(1-\lambda) \\
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leqslant f(x) + (1-\lambda)f(y)
\end{aligned}$$

Du fait du rôle symétrique joué par x et y le résultat reste valable pour tout $(x,y) \in I^2$.
Par conséquent :

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I.}$$

(c) D'après les question 11.a et 11.b

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I \text{ si et seulement si pour tout } a \in I,\ \Delta_a \text{ est croissante sur } I \setminus \{a\}.}$$

12. (a) D'après la question 11 Δ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$, or $b < c$ donc

$$\Delta_a(b) \leqslant \Delta_a(c).$$

Autrement dit :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

De même :

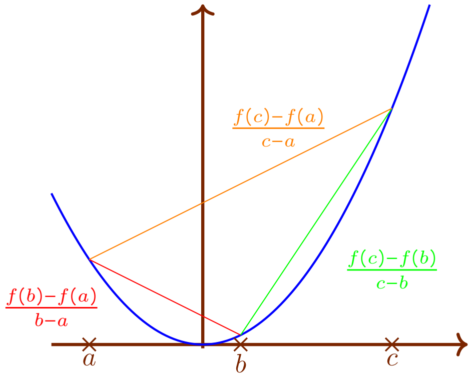
$$\Delta_c(a) \leqslant \Delta_c(b).$$

Autrement dit :

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leqslant \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Finalement

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.}$$

(b) 

13. (a) i. $\{\varphi(x) \mid x \in]a,b[\}$ est une partie non vide ($a < b$) et majorée de $\mathbb{R}$ (φ est majorée) donc cette partie admet une borne supérieure que nous noterons L.

Démontrons que $\varphi(x) \underset{\substack{x \to b \\ x<b}}{\longrightarrow} L$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Puisque L est une borne supérieure :

$$\exists x_0 \in]a;b[,\ L - \varepsilon < \varphi(x_0) \leqslant L.$$

Puisque φ est croissante nous en déduisons :

$$\forall x \in]x_0,b[,\ |L - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Autrement dit :

$\varphi(x)$ converge vers L lorsque x tend vers b par valeur inférieures.

ii. Si φ est minorée alors elle admet une limite finie à droite en a, égale à $\inf\{\varphi(x) \mid x \in]a,b[\}$.

(b) i. * Soit $x \in]a,b[$.
Puisque Δ_b est croissante sur $I \setminus \{b\}$ et $x < b < c$:

$$\Delta_b(x) \leqslant \Delta_b(c).$$

Ainsi Δ_b est croissante et majorée sur $]a,b[$ donc, d'après le théorème de la limite monotone,

$$\Delta_b(x) \underset{\substack{x \to b \\ x<b}}{\longrightarrow} f'_g(b).$$

* Puisque Δ_b est croissante : $\Delta_b(a) \leqslant \Delta_b(x)$ pour tout $x \in]a,b[$. Donc : $\Delta_b(a) \leqslant f'_g(b)$.
* Par symétrie on a aussi : $f'_d(b) \leqslant \Delta_b(c)$.
* De plus, pour tout $x,y \in]a,c[^2$ tel que $x < b < y$, puisque Δ_b est croissante :

$$\Delta_b(x) \leqslant \Delta_b(y).$$

En passant à la limite :

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x<b}} \Delta_b(x) \leqslant \lim_{\substack{y \to b \\ b<y}} \Delta_b(y).$$

Donc :

$$f'_g(b) \leqslant f'_d(b).$$

Finalement nous avons bien

$$\boxed{\Delta_b(a) \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b) \leqslant \Delta_b(c).}$$

ii. Comme nous l'avons remarqué à la question précédente :

$$\forall x \in]a,b[, \ \Delta_b(x) \leqslant f'_g(b).$$

Puisque $b - x > 0$:

$$f(b) - f(x) \leqslant f'_g(b)(b-x).$$

De même nous obtiendrions :

$$\forall x \in]b,c[, \ f(x) - f(b) \leqslant f'_d(b)(x-b).$$

Nous en déduisons :

$$\forall x \in]a,c[, \ |f(x) - f(b)| \leqslant \max\left(f'_g(b), f'_d(b)\right)|x-b|.$$

Ainsi f est lipschitzienne sur $]a,c[$ donc

$$\boxed{f \text{ est continue en } b.}$$

(c) Soit g l'application définie sur $[0;1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie par

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0;1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

g est clairement convexe (et concave) sur $]0;1]$. De plus, pour tout $\lambda \in [0;1]$ et $y \in]0;1]$,

$$g(\lambda \times 0 + (1-\lambda)y) = g((1-\lambda)y)$$

$g_{]0;1]} = Id_{]0;1]}$ donc

$$\begin{aligned} g(\lambda \times 0 + (1-\lambda)y) &= (1-\lambda)y \\ &= (1-\lambda g(y) \\ &\leqslant \lambda + (1-\lambda)g(y) \\ &\leqslant \lambda g(0) + (1-\lambda)f(y) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{g \text{ est convexe sur } [0;1] \text{ et pourtant discontinue en } 0.}$$

IV Caractérisation des fonctions convexes dérivables.

14. (a) * Soit $(a,b) \in I^2$, avec $a < b$.
Nous avons établi à la question 13 (a) i que, pour f convexe,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b).$$

Mais puisque f est dérivable sur I, $f'_g(b) = f'(b)$ et donc

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b).$$

Par symétrie :

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$$\boxed{f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b).}$$

* Ainsi :

$$\forall (a,b) \in I^2, a < b \Leftrightarrow f'(a) \leqslant f'(b).$$

Autrement dit :

$$\boxed{f' \text{ est croissante sur } I.}$$

(b) Soit $(a,x) \in I^2$.

* D'après la question précédente, si $a < x$ alors :

$$f'(a) \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Puisque qu'alors $x - a > 0$:

$$f'(a)(x-a) + f(a) \leqslant f(x).$$

* De même, si $x < a$ alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant f'(a).$$

Comme $x - a < 0$:

$$f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a).$$

Donc

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ est au-dessus de toutes ses tangentes.}}$$

15. (a) Il y a une coquille dans l'énoncé. ϕ n'est pas définie sur I mais sur $[0;1]$ et c'est sur cet intervalle qu'elle est dérivable.

ϕ est bien définie sur $[0;1]$.
De plus c'est la somme d'une fonction affine et de la composée de f et d'une fonction affine. f étant dérivable I nous en déduisons que

$$\boxed{\phi \text{ est dérivable sur } [0;1].}$$

De plus

$$\boxed{\forall t \in [0;1],\ \phi'(t) = f(x) - f(y) - (x-y)f(tx + (1-t)y).}$$

(b) L'application f est continue sur $[x,y]$ $(x < y)$ et dérivable sur $]x,y[$, donc, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists z \in]x,y[,\ \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(z).$$

Or : $z \in]x,y[\Longleftrightarrow \exists \gamma \in]0;1[,\ z = \gamma x + (1-\gamma)y$,
donc :

$$\exists \gamma \in]0;1[,\ f(x)-f(y) = (x-y)f'\left(\gamma x + (1-\gamma)y\right).$$

Soit $t \in [0;1]$.
En substituant $f(ix)-f(y)$ par l'expression précédente dans l'expression de ϕ' obtenue à la question précédente :

$$\phi'(t) = (x-y)f'\left(\gamma x + (1-\gamma)y\right) - (x-y)f\left(tx + (1-t)y\right).$$

En factorisant par $x-y$ nous obtenons bien que

$$\boxed{\begin{gathered}\text{pour tout } t \in [0;1],\\ \phi'(t) = (x-y)\Big(f'(\gamma x + (1-\gamma)y) - f'(tx + (1-t)y)\Big).\end{gathered}}$$

(c) Puisque f' est supposée croissante sur I :

t	0		γ		1
$f'(\gamma x + (1-\gamma)y) - f'(tx + (1-t)y)$		$+$	0	$-$	

D'où, sachant que $x - y < 0$:

x	0		γ		1
ϕ'		$+$	0	$-$	
ϕ	0	$\nearrow$	$\phi(\gamma)$	$\searrow$	0

Ceci étant valable pour tous $(x,y) \in I^2$ et $t \in [0;1]$, nous en déduisons que :

$$\boxed{\phi \text{ est convexe sur } I.}$$

(d) De la question précédente nous déduisons que, pour tout $t \in [0;1]$:

$$0 \leqslant \phi(t)$$

Nous en dédiuisons successivement :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y) \\ f(tx + (1-t)y) &\leqslant tf(x) + (1-t)f(y) \end{aligned}$$

16. Supposons f deux fois dérivable sur I.

 * D'après la question 14, si f est convexe alors f' est croissante ce qui équivaut à dire que f'' est positive.
 * Réciproquement si f'' est positive alors f' est croissante et, d'après la question 15, f est alors convexe.

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I \text{ si et seulement si } f'' \geqslant 0.}$$

V Différentes inégalités.

17. (a) Soient $(x_1,x_2,_1,y_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$.
Notons $t = \frac{y_1}{y_1+y_2}$.
Nous remarquons que :

$$\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} = t\frac{x_1}{y_1} + (1-t)\frac{x_2}{y_2}.$$

Puisque f est concave :

$$f\left[t\frac{x_1}{y_1+y_2} + (1-t)\frac{x_2}{y_1+y_2}\right] \geqslant tf\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + (1-t)f\left(\frac{x_2}{y_2}\right).$$

Autrement dit :

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right) \geqslant \frac{1}{y_1+y_2}y_1 f\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{1}{y_1+y_2}y_2 f\left(\frac{x_2}{y_2}\right).$$

Puisque $y_1 + y_2 > 0$ on a bien

$$\psi\left(x_1 + x_2, i_1 + y_2\right) \geqslant \psi(x_1, y_1) + \psi(x_2, y_2).$$

(b) Démontrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

* L'égalité est triviale pour $n = 1$.
* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'inégalité vraie au rang n et démontrons qu'elle l'est encore au rang $n + 1$.
  Soit $(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{2n+2}$
  Par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \psi(x_k, y_k) \leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right) + \psi(x_{n+1}, y_{n+1})$$

  D'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \psi(x_k, y_k) \leqslant \psi\left(x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k, y_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} y_k\right)$$

  Ainsi la proposition est vraie au rang $n + 1$.

Nous avons démontré par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{2n},$
$\sum_{k=1}^{n} \psi(x_k, y_k) \leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right).$

18. (a) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right) x^{\frac{1}{p} - 2}.$$

Ainsi $f'' \leqslant 0$. Autrement dit

f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) En utilisant la fonction ψ associée à f de la question précédente nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(a_k^p, b_k^q) \leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p, \sum_{k=1}^{n} b_k^q\right).$$

Autrement dit on a successivement :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^q \left(\frac{a_k^p}{b_k^q}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{q-\frac{q}{p}} a_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Et puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nous avons finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.}$$