Capes de mathématique 2022 épreuve 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 5 heures.

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions relevant de la circulaire du 17 juin 2021 BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1 : vrai-faux.

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.

I Ensembles de nombres.

1. Tout entier relatif non nul possède un inverse dans $\mathbb{Z}$ pour la multiplication.

   L'assertion est fausse.

   Il s'agit de démontrer qu'une propriété universelle est fausse : il suffit d'exhiber un contre-exemple.

   L'inverse de 2, $\frac{1}{2}$, n'est pas un entier (fraction irréductible).

2. La somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

   L'assertion est vraie.

   Il faut ici démontrer que la propriété universelle est vraie. Donc dans tous les cas.

   Soient x et y deux nombres décimaux.
   Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x = \frac{a}{10^n}$ et $y = \frac{b}{10^m}$.
   Donc

$$\begin{aligned} x+y &= \frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^m} \\ &= \frac{a\times 10^m+b\times 10^n}{10^n\times 10^m} \\ &= \frac{a\times 10^m+b\times 10^n}{10^{n+m}} \end{aligned}$$

Comme $a\times 10^m+b\times 10^n\in\mathbb{Z}$ et $n+m\in\mathbb{N}$, $x+y$ est bien décimal.

3. $\dfrac{1}{3}$ est un nombre décimal.

L'assertion est fausse.

Démontrons que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal en raisonnant par l'absurde.

Supposons que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Autrement dit : $\exists(a,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, $\frac{1}{3}=\frac{a}{10^n}$.
Nous en déduisons (produit en croix) :

$$10^n=3a$$

Or les diviseurs premiers de 10 sont 2 et 5 donc 10^n n'est pas divisible par 3 ce qui est contradictoire avec la précédente égalité.

Nous avons démontré par l'absurde que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

4. $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.

L'assertion est vraie.

Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}$.
Autrement dit il existe a et b des entiers naturels premiers entre eux tels que : $\sqrt{5}=\frac{a}{b}$.

Nous en déduisons : $5b^2 = a^2$. Donc $5|a^2$ et enfin $5|a$.
Ainsi : $\exists a' \in \mathbb{N},\ a = 5a'$.
Donc :

$$5b^2 = 5^2 a'^2$$
$$b^2 = 5a'^2$$

Puis $5|b^2$ et donc $5|b$.

Chemin faisant nous avons établi que a et b sont divisibles par 5.
Ceci contredit le fait que a et b aient été choisis premiers entre eux.

Nous avons démontré par l'absurde que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

5. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\sqrt{n}$ est un nombre irrationnel.

L'assertion est fausse.

En effet : $\sqrt{0} = 0 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6. La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

L'assertion est fausse.

En effet : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont irrationnels et pourtant $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0 \in \mathbb{Q}$.

7. La somme d'un rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

L'assertion est vraie.

Soient $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démontrons que $x + y$ est irrationnel en raisonnant par l'absurde.

Supposons que $x + y \in \mathbb{Q}$.
$x \in \mathbb{Q}$ donc : $\exists (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ x = \frac{a}{b}$.

$x+y \in \mathbb{Q}$ donc : $\exists (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $x+y = \frac{c}{d}$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + y &= \frac{c}{d} \\ y &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \\ y &= \frac{cb-ad}{bd} \end{aligned}$$

Puisque $cb-ad \in \mathbb{Z}$ et $bd \in \mathbb{N}^*$, $\frac{cb-ad}{bd} \in \mathbb{Q}$. Autrement dit $y \in \mathbb{Q}$.
Ceci contredit le fait que y est irrationnel.

Nous avons démontré en raisonnant par l'absurde que $x+y$ est irrationnel.

II Géométrie dans le plan.

8. Dans un plan muni d'un repère cartésien, $2x = 3$ est l'équation d'une droite.

L'assertion est vraie.

Le niveau des questions étant élémentaire j'ai du mal à voir une justification élémentaire convenant.

Il s'agit d'une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses et passant par les points d'abscisses $\frac{3}{2}$.

9. Dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1,1)$, $B(-1,2)$, $C(1,-1)$, $D(4,5)$.
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

L'assertion est vraie.

$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si le produit scalaire (euclidien usuel dans un repère orthonormé du plan) de leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est nul.
Or d'une part $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'autre part $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} &= -2\times 3+1\times\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $(AB) \parallel (CD)$.

10. Dans un plan euclidien, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$. Soit le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. Alors $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = 20$.

L'assertion est

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Si les produit scalaire et normes sont ceux usuels dans le plan :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|^2+0\\ &= \frac{1}{2}\times 4^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = 8.}$$

III Géométrie dans l'espace.

On se place dans l'espace, muni d'un repère cartésien.

11. Si deux droites D et D' sont parallèles à un même plan P, alors D est parallèle à D'.

L'assertion est fausse.

Exhibons un contre-exemple.

Soient $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan vectoriel directeur de P et $A \in P$.
Notons D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{i}$, D' celle passant par A et de vecteur directeur $\vec{j}$.
Par construction $D \subset P$ et $D' \subset P$ donc en particulier D et D' sont parallèles à P.
Par contre $(\vec{i},\vec{j})$ est libre puisque c'est une base. Autrement dit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires. Et par conséquent D et D' sont sécantes et non pas parallèles.

12. $2x + 3y = 3$ est l'équation d'une droite.

L'assertion est fausse.

$A(0,1,1)$, $B(0,1,2)$ et $C\left(\frac{3}{2},0,2\right)$ appartiennent à l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions de l'équation proposée.
Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-1\\0\end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires par exemple $\begin{vmatrix}0 & \frac{3}{2}\\0 & -1\end{vmatrix} = 0$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

13. La droite Δ définie par le système d'équations $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

(a) passe par le point A de coordonnées $(1,0,1)$,

Assertion vraie.

D'une part : $1 + 2 \times 0 + 1 = 2$ et d'autre part : $1 + 0 - 1 = 0$ donc $A \in \Delta$.

(b) a comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

L'assertion est fausse.

Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de Δ.

Supposons que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ.

Remarquons que Δ est l'intersection des plans $P_1 : \ x + 2y + z = 2$ et $P_2 : \ x + y - z = 0$.

Notons $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ est l'équation du plan P_1. Donc $\vec{u}$ est orthogonal à P_1. Donc Δ est orthogonale à P_1 ce qui contredit le fait que $\Delta \subset P_1$.

(c) est contenue dans le plan P d'équation $3x + 4y - z = 2$.

L'assertion est vraie.

Soit $M(x,y,z) \in \Delta$.
On a donc :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 & L_1 \\ x + y - z = 0 & L_2 \end{cases}$$

En faisant $L_1 + 2L_2$ on obtient

$$3x + 4y - z = 2.$$

Autrement dit si $M \in \Delta$ alors $M \in P$.

$$\Delta \subset P.$$

IV Matrices.

14. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ont le même rang.

L'assertion est vraie.

Dans $\mathbb{R}^2$ le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul et clairement lié à lui même donc la famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ a un rang de 1.

De même $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ a un rang de 1.

15. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

L'assertion est fausse.

Deux matrices semblables ont nécessairement la même trace ce qui n'est pas le cas ici.

16. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

L'assertion est fausse.

Notons M la matrice proposée.

$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$ donc 1 est la seule valeur propre et sa multiplicité est 2.

$M - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 1. Par conséquent, d'après le théorème du rang, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M - I_2$ a un noyau de dimension 1. Autrement dit, le sous-espace propre associé à la valeur propre de 1 de M est de dimension 1.

Puisque cette dimension n'égale pas la multiplicité de la valeur propre, M n'est pas diagonalisable.

17. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

L'assertion est vraie.

Notons M la matrice proposée.

$\chi_M(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)$. Ce polynôme caractéristique étant scindé simple dans $\mathbb{R}$, M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

V Suites.

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels.

18. Si elle est décroissante et minorée par 0 alors elle converge vers 0.

L'assertion est fausse.

La suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante minorée par 0 est pourtant elle converge vers 1.

19. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent alors $(u_n)_n$ converge.

L'assertion est fausse.

Il faudrait que les deux suites extraites aient la même limite.

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \equiv 0 \pmod 2 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

$(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent alors que $(u_n)_n$ diverge.

VI Probabilités.

Un élève répond au hasard aux cinq questions d'un questionnaire de type « VRAI -FAUX ».

20. La probabilité qu'il ait cinq réponses correctes est égale à $\dfrac{1}{32}$.

L'assertion est vraie.

En notant X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonne réponses, il est raisonnable de modéliser par une loi binomiale la situation décrite : $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5,\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=5) &= \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= \frac{1}{2^5} \\ &= \frac{1}{32}\end{aligned}$$

21. La probabilité qu'il ait exactement trois réponses correctes est égale à $\dfrac{10}{32}$.

L'assertion est vraie.

De même :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=3) &= \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2} \\ &= \frac{5\times 4}{2}\cdot\frac{1}{2^5} \\ &= \frac{10}{32}\end{aligned}$$

22. Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse aucun. La note moyenne à laquelle il peut prétendre est 2,5 sur 5.

L'assertion est vraie.

Avec les notations des questions précédentes, puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5,\frac{1}{2}\right)$: $\mathbb{E}(X) = 5\times\frac{1}{2} = 2{,}5$.

VII Arithmétique.

23. Si trois nombres entiers relatifs a, b, c sont tels que a et b divisent c, alors ab divise c.

L'assertion est fausse.

Avec $a=4$, $b=6$ et $c=12$, on a $a|c$, $b|c$ et pourtant $ab \nmid c$ car $0 \leqslant c < ab$.

24. Si trois nombres entiers relatifs a, b, c sont tels que a divise b et c, alors bc est un multiple de a.

L'assertion est vraie.

a divise b donc : $\exists d \in \mathbb{Z}$, $b = ad$.
Donc : $bc = adc$, et par conséquent bc est un multiple de a.

25. $19x \equiv 3\ [53]$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

L'assertion est vraie.

$19 \wedge 53 = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, il existe $(p,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $19p + 53n = 1$.
Donc : $19 \times (3p) + 53 \times (3n) = 3$.
Ainsi $3p$ est solution de $19x \equiv 3\ [53]$.
Il est immédiat alors que $19 \times (3x - 53) + 53 \times (3x + 19) = 3$ donc $3x - 53$ est aussi une solution de $19x \equiv 3\ [53]$ distincte de $3x$.

Problème n° 2 : convexité.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Dans ce sujet I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point.

Soit f une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur I.
On rappelle que f est dite convexe sur I si

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0;1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Inégalité de convexité $(\star)$.

On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I.

I Préliminaires.

Soit f une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur I.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est croissante sur I.

$$\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

2. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est n'est pas croissante sur I.

En notant $\wedge$ le connecteur logique « et » :

$$\exists (x,y) \in I^2,\ [x < y] \wedge [f(x) > f(y)].$$

3. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est une fonction affine sur I.

En utilisant la caractérisation avec le taux d'accroissement) (taux de variation) :

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in I^2,\ x \neq y \Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = m.$$

4. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est continue en un point a de I.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y) < \varepsilon.$$

II Quelques propriétés et exemples.

5. Écrire une inégalité, analogue à $(\star)$, caractérisant une fonction concave sur I.

f est concave sur I si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0;1],\ -f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant -\lambda f(x) - (1-\lambda) f(y).$$

Ce qui équivaut à

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0;1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

6. **Caractérisation graphique de la convexité.**

   (a) Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$. Démontrer que $z \in [x;y]$ si et seulement si il existe $\lambda \in [0;1]$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

   Démontrons l'existence et l'unicité de l'écriture proposée pour z.

   Considérons $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ \nu & \mapsto & (x-y)\nu + y \end{array} \right.$ qui est une fonction affine strictement décroissante donc bijective de $[0;1]$ sur $\varphi([0;1])$.
   Comme φ est strictement décroissante et continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi([0;1]) = [\varphi(1);\varphi(0)]$.
   Ainsi $\tilde{\varphi} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & [x;y] \\ \nu & \mapsto & (x-y)\nu + y \end{array} \right.$ est une bijection.
   Nous en déduisons que

   $$\boxed{z \in [x,y] \text{ si et seulement si il existe un unique } \lambda \in [0;1] \text{ tel que } z = \lambda x + (1-\lambda)y.}$$

   Démontrons l'équivalence par double implication.

   * Supposons que $z \in [x;y]$.

   $$\begin{aligned} z &= \frac{y-x}{y-x}(z-x) + x \\ &= \frac{z-x}{y-x}y - \frac{z-x}{y-x}x + x \end{aligned}$$

   En posant $\mu = \frac{z-x}{y-x}$:

   $$z = \mu y + (1-\mu)x$$

   Or

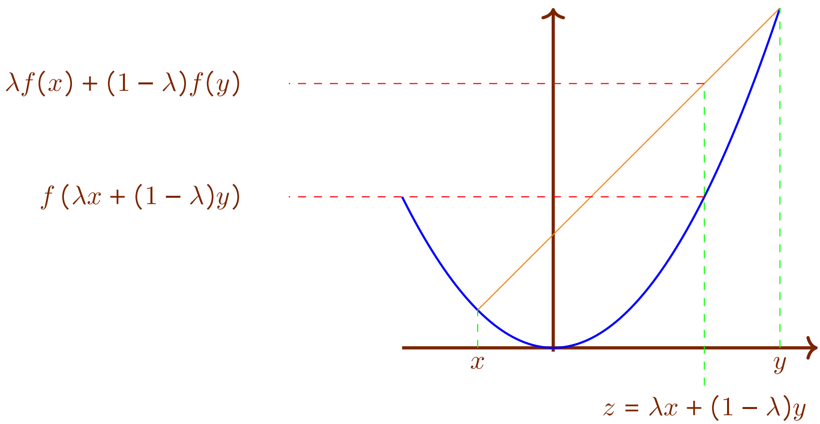
   $$\begin{aligned} &x \leqslant z \leqslant y \\ &0 \leqslant z-x \leqslant y-x \\ &0 \leqslant \frac{z-x}{y-x} \leqslant 1 \end{aligned}$$

   donc, notant $\lambda = 1-\mu$ nous avons bien : $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ avec $\lambda \in [0;1]$.

* Supposons maintenant qu'il existe $\lambda \in [0;1]$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.
$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ \nu & \mapsto & (x-y)\nu + y \end{array} \right.$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est négatif donc elle est décroissante sur $[0;1]$.
Par conséquent : $\forall \nu \in [0;1]$, $\varphi(0) \geqslant \varphi(\nu) \geqslant \varphi(1)$.
Autrement dit : $\forall \nu \in [0;1]$, $y \geqslant (x-y)\nu + y \geqslant x$.
En particulier : $y \geqslant (x-y)\lambda + y \geqslant x$.
Où encore :

Nous avons démontré par double implication que $z \in [x;y]$ si et seulement si $\exists \lambda \in [0;1]$, $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

(b) Sans démonstration, illustrer l'inégalité de convexité $(\star)$ par une figure.



7. **Opérations et convexité.**

(a) Soient f et g des fonctions convexes sur I. Démontrer que $f+g$ est convexe sur I.

Soit $(x,y,\lambda) \in I^2 \times [0,1]$.
Par convexité de f et de g :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \end{array} \right.$$

En sommant terme à terme les deux inégalités :

$$\begin{aligned} f(\lambda x+(1-\lambda)y)+g(\lambda x+(1-\lambda)y) &\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+ \\ &\quad \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y) \\ [f+g](\lambda x+(1-\lambda)y) &\leqslant \lambda\left[f(x)+g(x)\right]+ \\ &\quad (1-\lambda)\left[f(y)+g(y)\right] \\ [f+g](\lambda x+(1-\lambda)y) &\leqslant \lambda[f+g](x)+(1-\lambda)[f+g](y) \end{aligned}$$

L'inégalité de convexité est vérifiée pour tout $(x,y,\lambda)\in I^2\times[0,1]$ donc

$$\boxed{f+g \text{ est convexe sur } I.}$$

(b) Soient f une fonction convexe sur I à valeurs dans J et g une fonction convexe et croissante sur J. Démontrer que $g\circ f$ est convexe sur I.

Soit $(x,y,\lambda)\in I^2\times[0,1]$.
f étant convexe :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

g étant croissante :

$$g\left[f(\lambda x+(1-\lambda)y)\right]\leqslant g\left[\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\right]$$

g étant convexe :

$$\begin{aligned} g\circ f(\lambda x+(1-\lambda)y) &\leqslant \lambda g\left[f(x)\right]+(1-\lambda)g\left[f(y)\right] \\ g\circ f(\lambda x+(1-\lambda)y) &\leqslant \lambda g\circ f(x)+(1-\lambda)g\circ f(y) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{g\circ f \text{ est convexe sur } I.}$$

(c) Sans démonstration, énoncer une propriété du même type qui permettrait de conclure que $g\circ f$ est concave.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } f \text{ est concave sur } I \text{ à valeurs dans } J \text{ et } g \text{ est concave et} \\ \text{croissante sur } J\text{, alors } g\circ f \text{ est concave sur } I.\end{array}}$$

8. **Quelques exemples.**
L'étude des exemples qui suivent prendra appui sur la définition de la convexité et sur les résultats précédemment démontrés.

(a) Démontrer que la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.

Soit $(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]$.
D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\lambda x + (1-\lambda)y| &\leqslant |\lambda x| + |(1-\lambda)y| \\ &\leqslant |\lambda| \cdot |x| + |1-\lambda| \cdot |y| \\ &\leqslant \lambda |x| + (1-\lambda)|y| \end{aligned}$$

La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Soit $(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]$.

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leqslant \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\ &0 \leqslant \lambda x^2 - \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)y^2 - (1-\lambda)^2 y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy \\ &0 \leqslant \lambda(1-\lambda)x^2 + \lambda(1-\lambda)y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy \\ &0 \leqslant x^2 + y^2 - 2xy, \text{ car } \lambda(1-\lambda) \geqslant 0 \\ &0 \leqslant (x-y)^2 \end{aligned}$$

Nous avons raisonné par équivalence et la dernière inégalité est clairement toujours vraie donc l'inégalité de convexité est vérifiée.

La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.

(c) On cherche à démonter que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $x < y$. On considère la fonction g définie sur $[0;1]$ par

$$\forall t \in [0;1],\ g(t) = \ln\left(tx + (1-t)y\right) - t\ln(x) - (1-t)\ln(y).$$

i. Étudier la monotonie de la fonction g', dérivée de g, sur $[0;1]$.

g est dérivable sur $[0;1]$ car si $(x,y,t) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \times [0;1]$ alors $tx + (1-t)y \in [x,y] \subset \mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $t \in [0;1]$

$$g'(t) = \frac{x-y}{tx+(1-t)y} - \ln(x) + \ln(y)$$

$t \mapsto tx + (1-t)y$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est $x - y$. Or par hypothèse $x - y < 0$ donc $t \mapsto tx + (1-t)y$ est strictement décroissante.
D'où, la fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{1}{tx+(1-t)y}$ est strictement croissante sur $[0;1]$.
Enfin, puisque $x-y < 0$, $t \mapsto \frac{x-y}{tx+(1-t)y} - \ln(x) + \ln(y)$ est strictement décroissante sur $[0;1]$.

$$\boxed{g' \text{ est strictement décroissante sur } [0;1].}$$

ii. Démontrer que :

$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x-y} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Notons $z = \frac{x}{y}$. Remarquons que $z \in]0;1]$.

$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x-y} \leqslant \frac{1}{x}$$

équivaut successivement à :

$$\frac{x-y}{y} \geqslant \ln(x) - \ln(y) \geqslant \frac{x-y}{x}, \quad \text{car } x - y < 0$$

$$\frac{x}{y} - 1 \geqslant \ln\left(\frac{x}{y}\right) \geqslant 1 - \frac{y}{x}.$$

L'encadrement à démontrer est équivalent à :

$$z - 1 \geqslant \ln(z) \geqslant 1 - \frac{1}{z}.$$

Démontrons $z - 1 \geqslant \ln(z) \geqslant 1 - \frac{1}{z}$.

* $h : \left\{ \begin{array}{ccc}]0;1] & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \ln(z) - z + 1 \end{array} \right.$ est dérivable et $h'(z) = \frac{(1-z)(1+z)}{z}$.
  Ainsi $h' \geqslant 0$ sur $]0;1]$ et h est croissante sur ce même intervalle.
  Comme de plus $h(1) = 0$ nous en déduisons : $h \leqslant 0$ sur $]0;1]$.
  Nous en déduisons : $z - 1 \geqslant \ln(z)$.
* De même $\ell : z \mapsto \ln(z) - 1 + \frac{1}{z}$ et dérivable sur $]0;1]$ et $\ell'(z) = \frac{z-1}{z^2}$.
  Donc ℓ est décroissante sur $]0;1]$. Comme de plus $\ell(1) = 0$, nous avons : $\ell \geqslant 0$ sur $]0;1]$. Nous avons démontré que $\ln(z) \geqslant 1 - \frac{1}{z}$.

$$\boxed{\text{Ainsi pour tout } z \in]0;1],\ z - 1 \geqslant \ln(z) \geqslant 1 - \frac{1}{z}.}$$

iii. En déduire le signe de $g'(0)$ et de $g'(1)$.

* Étudions le signe de $g'(0)$.

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{x-y}{y} - \ln(x) + \ln(y) \\ &= (x-y)\left(\frac{1}{y} - \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x-y}\right) \end{aligned}$$

  Or, d'après la question précédente,

$$\frac{1}{y} - \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x-y} \leqslant 0$$

  et par construction $x - y < 0$ donc

$$\boxed{g'(0) \leqslant 0.}$$

* En procédant de même :

$$\boxed{g'(1) \geqslant 0.}$$

iv. Déduire des questions précédentes que g' s'annule une unique fois sur $[0;1]$.

g' est continue, car dérivable, sur $[0;1]$, $g'(0) \leqslant 0 \leqslant g'(1)$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in [0;1],\ g'(t) = 0.$$

Comme de plus g' est strictement décroissante, elle est injective et α est donc unique.

$$\boxed{\exists ! \alpha \in [0;1],\ g'(\alpha) = 0.}$$

v. Déterminer le signe de g sur $[0;1]$ et conclure.

De la stricte décroissance de g' et de la question précédente nous déduisons le tableau de variation :

x	0		α		1
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

Nous en déduisons :

$$\boxed{g \geqslant 0 \text{ sur } [0;1].}$$

Soit $t \in [0;1]$.

$$\begin{aligned} g(t) \geqslant 0 &\iff \ln(tx + (1-t)y) - t\ln(x) - (1-t)\ln(y) \geqslant 0 \\ &\iff \ln(tx + (1-t)y) \geqslant t\ln(x) + (1-t)\ln(y) \end{aligned}$$

Ainsi $-\ln$ vérifie $(\star)$.
Autrement dit :

$$\boxed{\ln \text{ est concave.}}$$

9. **Généralisation de l'inégalité de convexité.**
Soit f une fonction convexe sur I.
Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I$$

et

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ l'assertion suivante : $\forall (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in I^n$, $\forall (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I \\ f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \end{array} \right.$$

Démontrons par récurrence sur n que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

* Justifions que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Soit $(\lambda_1,x_1) \in \mathbb{R}_+ \times I$.
De $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ on déduit $\lambda_1 = 1$.

- D'une part, on a donc $\lambda_1 x_1 = x_1 \in I$.
- Et d'autre part, on a $f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1)$ et donc $f(\lambda_1 x_1) \leqslant \lambda_1 f(x_1)$.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est alors nécessairement vraie.
Soient $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1},) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$.

- Remarquons tout d'abord que si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $(x,y) \in I^2$ avec $x \leqslant y$ alors,

$$x \leqslant \lambda x + (1-\lambda)y \leqslant y.$$

Autrement dit, puisque I est un intervalle,

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in I.$$

Notons $\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. Comme $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} = 1$ et que $(x_1,\ldots x_n) \in I^n$, nous en déduisons, d'après l'hypothèse de récurrence : $x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} x_k \in I$.

$\mu \in \mathbb{R}_+$ et $(x, x_{n+1}) \in I^2$, donc, d'après notre remarque liminaire : $\mu x + (1-\mu)x_{n+1} \in I$.
Autrement dit : $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \in I$.

- En gardant les notations précédentes, et puisque f est convexe :

$$f\left(\mu x + (1-\mu)x_{n+1}\right) \leqslant \mu f(x) + (1-\mu) f(x_{n+1})$$

Autrement dit :

$$f\left(\mu x + (1-\mu)x_{n+1}\right) \leqslant \mu f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$f\left(\mu x + (1-\mu)x_{n+1}\right) \leqslant \mu f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\mu} x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Enfin :

$$f\left(\mu x + (1-\mu)x_{n+1}\right) \leqslant f \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Nous avons établi que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

10. **Deux applications.**

(a) À l'aide de la concavité de ln, démontrer que pour tout $(a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$, on a

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) &= \ln\left((abc)^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= \frac{\ln(a) + \ln(b) + \ln(c)}{3} \end{aligned}$$

La fonction logarithme étant concave :

$$\ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) \leqslant \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

La fonction exponetielle étant croissante :

$$\exp\circ\ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) \leqslant \exp\circ\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$$\boxed{\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.}$$

(b) Démontrer que $\ln\circ\ln$ est concave sur $]1,+\infty[$.
En déduire que pour tout$(x,y) \in (]1,+\infty[)^2$, on a

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

ln est concave sur $]1,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et croissante donc, d'après la question 7.c

$$\boxed{\ln\circ\ln \text{ est concave.}}$$

Nous en déduisons :

$$\ln\circ\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln\circ\ln(x)+\ln\circ\ln(y)}{2}$$
$$\ln\circ\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln\left[\ln(x)\ln(y)\right]$$
$$\ln\circ\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \ln\left[\left(\ln(x)\ln(y)\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\ln\circ\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \ln\left[\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right]$$

Puis exponentielle étant croissante :

$$\exp\circ\ln\circ\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \exp\circ\ln\left[\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right]$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.}$$

III Inégalité des trois pentes et conséquences.

Soit f une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur I.
Pour tout $a \in I$, on considère la fonction

$$\Delta_a : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{array} \right. .$$

11. (a) On suppose dans cette question que la fonction f est convexe sur $\mathbb{I}$. Soient $a \in I$ et $(t,u) \in (I \setminus \{a\})^2$ tel que $t < u$.

i. On suppose que $t < u < a$. D'après la question 6.a, on sait qu'il existe $\lambda \in]0;1[$ tel que $u = \lambda t + (1-\lambda)a$.
Démontrer que $f(u) - f(a) \leqslant \lambda(f(t) - f(a))$ puis que $\Delta_a(t) \leqslant \Delta_a(u)$.

$$f(u) - f(a) = f(\lambda t + (1-\lambda)a) - f(a)$$

Puisque f est convexe :

$$\begin{aligned} f(u) - f(a) &\leqslant \lambda f(t) + (1-\lambda)f(a) - f(a) \\ &\leqslant \lambda(f(t) - f(a)) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(u) - f(a) \leqslant \lambda(f(t) - f(a)).}$$

De : $u < a$ nous déduisons : $u - a < 0$.
Et donc :

$$\begin{aligned} \frac{f(u) - f(a)}{u - a} &\geqslant \lambda \frac{f(t) - f(a)}{u - a} \\ &\geqslant \lambda \frac{f(t) - f(a)}{\lambda t + (1-\lambda)a} \\ &=\geqslant \lambda \frac{f(t) - f(a)}{\lambda(t - a)} \\ &\geqslant \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\Delta_a(u) \geqslant \Delta_a(t).}$$

ii. On admet que cette dernière inégalité reste vraie pour $a < t < u$ et pour $t < a < u$. Que peut-on en déduire pour Δ_a ?

Ainsi : $\forall (t,u) \in (I \setminus \{a\})^2, (t < u) \Rightarrow \Delta_a(t) < \Delta_a(u)$.
Autrement dit :

$$\boxed{\Delta_a \text{ est croissante sur } I \setminus \{a\}.}$$

(b) On suppose dans cette question que, pour tout $a \in I$, Δ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
Soient $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $\lambda \in [0;1[$.

i. Démontrer que $\Delta_x(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \Delta_x(y)$.

Puisque $x < y$ et $\lambda \in [0;1[$, $x < \lambda x + (1-\lambda)y \leqslant y$.
Δ_x étant croissante sur $I \setminus \{x\}$ nous en déduisons :

$$\boxed{\Delta_x(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \Delta_x(y).}$$

ii. En déduire que f est convexe sur I.

D'après la question précédente et dans les mêmes conditions (notamment $x < y$) :

$$\begin{aligned}
\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{\lambda x + (1-\lambda)y - x} &\leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\\
\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} &\leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\\
f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x) &\leqslant (f(y) - f(x))(1-\lambda)\\
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leqslant f(x) - (1-\lambda)f(x) + f(y)(1-\lambda)\\
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leqslant f(x) + (1-\lambda)f(y)
\end{aligned}$$

Du fait du rôle symétrique joué par x et y le résultat reste valable pour tout $(x,y) \in I^2$.

Par conséquent :

$$f \text{ est convexe sur } I.$$

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur Δ_a pour que f soit convexe sur I.

D'après les question 11.a et 11.b

f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, Δ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

On suppose dans la suite de cette partie III que la fonction f est convexe sur I.

12. Soit $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$.

(a) En utilisant la question 11, démontrer l'inégalité des trois pentes :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

D'après la question 11 Δ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$, or $b < c$ donc

$$\Delta_a(b) \leqslant \Delta_a(c).$$

Autrement dit :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

De même :

$$\Delta_c(a) \leqslant \Delta_c(b).$$

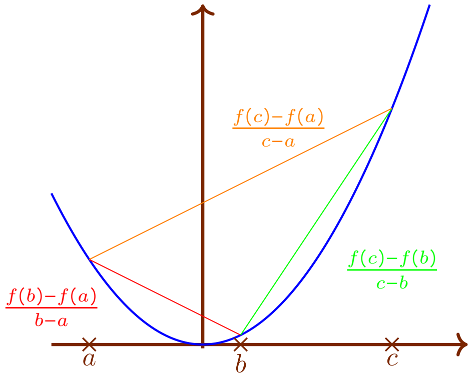
Autrement dit :

$$\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

Finalement

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

(b) Illustrer cette inégalité par une figure.



13. (a) **Théorème de la limite monotone.**

Soit φ une fonction croissante sur l'intervalle $]a,b[$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.

i. Démontrer que si φ est majorée alors elle admet une limite finie à gauche en b, égale à la borne supérieure de l'ensemble $\{\varphi(x)\ ;\ x \in]a,b[\}$.

$\{\varphi(x) \mid x \in]a,b[\}$ est une partie non vide ($a < b$) et majorée de $\mathbb{R}$ (φ est majorée) donc cette partie admet une borne supérieure que nous noterons L.

Démontrons que $\varphi(x) \underset{\substack{x \to b \\ x < b}}{\longrightarrow} L$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Puisque L est une borne supérieure :

$$\exists x_0 \in]a;b[,\ L - \varepsilon < \varphi(x_0) \leqslant L.$$

Puisque φ est croissante nous en déduisons :

$$\forall x \in]x_0,b[,\ |L - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Autrement dit :

$\varphi(x)$ converge vers L lorsque x tend vers b par valeur inférieures.

ii. Sans démonstration, que peut-on dire si φ est minorée ?

Si φ est minorée alors elle admet une limite finie à droite en a, égale à $\inf\{\varphi(x) \mid x \in]a,b[\}$.

(b) Soit $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$.

i. En appliquant le théorème de la limite monotone à Δ_b, démontrer que f est dérivable à gauche et à droite en b et que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b) \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

* Soit $x \in]a,b[$.
  Puisque Δ_b est croissante sur $I \setminus \{b\}$ et $x < b < c$:

$$\Delta_b(x) \leqslant \Delta_b(c).$$

  Ainsi Δ_b est croissante et majorée sur $]a,b[$ donc, d'après le théorème de la limite monotone,

$$\Delta_b(x) \underset{\substack{x \to b \\ x < b}}{\longrightarrow} f'_g(b).$$

* Puisque Δ_b est croissante : $\Delta_b(a) \leqslant \Delta_b(x)$ pour tout $x \in]a,b[$.
  Donc : $\Delta_b(a) \leqslant f'_g(b)$.
* Par symétrie on a aussi : $f'_d(b) \leqslant \Delta_b(c)$.
* De plus, pour tout $x,y \in]a,c[^2$ tel que $x < b < y$, puisque Δ_b est croissante :

$$\Delta_b(x) \leqslant \Delta_b(y).$$

  En passant à la limite :

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \Delta_b(x) \leqslant \lim_{\substack{y \to b \\ b < y}} \Delta_b(y).$$

  Donc :

$$f'_g(b) \leqslant f'_d(b).$$

Finalement nous avons bien

$$\Delta_b(a) \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b) \leqslant \Delta_b(c).$$

ii. Montrer que f est continue en b.

Comme nous l'avons remarqué à la question précédente :

$$\forall x \in]a,b[,\ \Delta_b(x) \leqslant f'_g(b).$$

Puisque $b - x > 0$:

$$f(b) - f(x) \leqslant f'_g(b)(b-x).$$

De même nous obtiendrions :

$$\forall x \in]b,c[,\ f(x) - f(b) \leqslant f'_d(b)(x-b).$$

Nous en déduisons :

$$\forall x \in]a,c[,\ |f(x) - f(b)| \leqslant \max\left(f'_g(b), f'_d(b)\right)|x-b|.$$

Ainsi f est lipschitzienne sur $]a,c[$ donc

f est continue en b.

(c) Donner un exemple d'une fonction convexe et non continue sur un intervalle.

Soit g l'application définie sur $[0;1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie par

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0;1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

g est clairement convexe (et concave) sur $]0;1]$. De plus, pour tout $\lambda \in [0;1]$ et $y \in]0;1]$,

$$g(\lambda \times 0 + (1-\lambda)y) = g((1-\lambda)y)$$

$g_{]0;1]} = Id_{]0;1]}$ donc

$$\begin{aligned} g(\lambda \times 0 + (1-\lambda)y) &= (1-\lambda)y \\ &= (1-\lambda g(y) \\ &\leqslant \lambda + (1-\lambda)g(y) \\ &\leqslant \lambda g(0) + (1-\lambda)f(y) \end{aligned}$$

Ainsi

g est convexe sur $[0;1]$ et pourtant discontinue en 0.

IV Caractérisation des fonctions convexes dérivables.

Soit f une fonction dérivable sur I. On note f' sa fonction dérivée sur I.

14. Dans cette question, on suppose f convexe sur I.

(a) Montrer que pour tout $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$, on a

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b),$$

et en déduire que f' est croissante.

* Soit $(a,b) \in I^2$, avec $a < b$.
Nous avons établi à la question 13 (a) i que, pour f convexe,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b).$$

Mais puisque f est dérivable sur I, $f'_g(b) = f'(b)$ et donc

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b).$$

Par symétrie :

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$$\boxed{f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b).}$$

* Ainsi :

$$\forall (a,b) \in I^2, a < b \Longleftrightarrow f'(a) \leqslant f'(b).$$

Autrement dit :

$$\boxed{f' \text{ est croissante sur } I.}$$

(b) Justifier que la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

Soit $(a,x) \in I^2$.

* D'après la question précédente, si $a < x$ alors :

$$f'(a) \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Puisque qu'alors $x - a > 0$:

$$f'(a)(x - a) + f(a) \leqslant f(x).$$

* De même, si $x < a$ alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant f'(a).$$

Comme $x - a < 0$:

$$f(x) \geqslant f'(a)(x - a) + f(a).$$

Donc

la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

15. Dans cette question, on suppose f' croissante sur I.
Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$. On considère la fonction ϕ définie sur $[0,1]$ par

$$\forall t \in [0,1],\ \phi(t) = tf(x) + (1 - t)f(y) - f\left(tx + (1 - t)y\right).$$

(a) Démontrer que ϕ est dérivable sur I et déterminer sa dérivée ϕ'.

Il y a une coquille dans l'énoncé. ϕ n'est pas définie sur I mais sur $[0;1]$ et c'est sur cet intervalle qu'elle est dérivable.

ϕ est bien définie sur $[0;1]$.
De plus c'est la somme d'une fonction affine et de la composée de f et d'une fonction affine. f étant dérivable I nous en déduisons que

ϕ est dérivable sur $[0;1]$.

De plus

$$\forall t \in [0;1],\ \phi'(t) = f(x) - f(y) - (x - y)f\left(tx + (1 - t)y\right).$$

(b) En utilisant le théorème des accroissements finis pour f entre x et y, démonter qu'il existe $\gamma \in]0;1[$ tel que pour tout $t \in [0;1]$,

$$\phi'(t) = (x-y)\left(f'(\gamma x + (1-\gamma)y) - f'(tx + (1-t)y)\right).$$

L'application f est continue sur $[x,y]$ $(x < y)$ et dérivable sur $]x,y[$, donc, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists z \in]x,y[,\ \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = f'(z).$$

Or : $z \in]x,y[\Longleftrightarrow \exists \gamma \in]0;1[,\ z = \gamma x + (1-\gamma)y$,
donc :

$$\exists \gamma \in]0;1[,\ f(x) - f(y) = (x-y)f'\left(\gamma x + (1-\gamma)y\right).$$

Soit $t \in [0;1]$.
En substituant $f(ix) - f(y)$ par l'expression précédente dans l'expression de ϕ' obtenue à la question précédente :

$$\phi'(t) = (x-y)f'\left(\gamma x + (1-\gamma)y\right) - (x-y)f\left(tx + (1-t)y\right).$$

En factorisant par $x-y$ nous obtenons bien que

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour tout } t \in [0;1],\\ \phi'(t) = (x-y)\left(f'(\gamma x + (1-\gamma)y) - f'(tx + (1-t)y)\right).\end{array}}$$

(c) En déduire les variations de ϕ.

Puisque f' est supposée croissante sur I :

t	0		γ		1
$f'(\gamma x + (1-\gamma)y) - f'(tx + (1-t)y)$		$+$	0	$-$	

D'où, sachant que $x - y < 0$:

x	0		γ		1
ϕ'		$+$	0	$-$	
ϕ	0	$\nearrow$	$\phi(\gamma)$	$\searrow$	0

Ceci étant valable pour tous $(x,y) \in I^2$ et $t \in [0;1]$, nous en déduisons que :

$$\boxed{\phi \text{ est convexe sur } I.}$$

(d) En déduire que la fonction f est convexe sur I.

De la question précédente nous déduisons que, pour tout $t \in [0;1]$:

$$0 \leqslant \phi(t)$$

Nous en dédiuisons successivement :

$$0 \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y)$$
$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

16. Montrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur I est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

Supposons f deux fois dérivable sur I.

* D'après la question 14, si f est convexe alors f' est croissante ce qui équivaut à dire que f'' est positive.
* Réciproquement si f'' est positive alors f' est croissante et, d'après la question 15, f est alors convexe.

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I \text{ si et seulement si } f'' \geqslant 0.}$$

V Différentes inégalités.

17. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction concave.

On définit la fonction $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & yf\left(\frac{x}{y}\right) \end{array} \right.$

(a) Démontrer que pour tout $(x_1,x_2,_1,y_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$, on a

$$\psi(x_1,y_1) + \psi(x_2,y_2) \leqslant \psi(x_1 + x_2,y_1 + y_2).$$

Soient $(x_1,x_2,_1,y_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$.
Notons $t = \frac{y_1}{y_1+y_2}$.
Nous remarquons que :

$$\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = t\frac{x_1}{y_1} + (1-t)\frac{x_2}{y_2}.$$

Puisque f est concave :

$$f\left[t\frac{x_1}{y_1 + y_2} + (1-t)\frac{x_2}{y_1 + y_2}\right] \geqslant tf\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + (1-t)f\left(\frac{x_2}{y_2}\right).$$

Autrement dit :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}\right) \geqslant \frac{1}{y_1 + y_2}y_1 f\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{1}{y_1 + y_2}y_2 f\left(\frac{x_2}{y_2}\right).$$

Puisque $y_1 + y_2 > 0$ on a bien

$$\boxed{\psi\left(x_1 + x_2,i_1 + y_2\right) \geqslant \psi(x_1,y_1) + \psi(x_2,y_2).}$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{2n}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(x_k,y_k) \leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right) \quad (\star\star).$$

Démontrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

* L'égalité est triviale pour $n = 1$.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'inégalité vraie au rang n et démontrons qu'elle l'est encore au rang $n+1$.
  Soit $(x_1,\ldots,x_{n+1},y_1,\ldots,y_{n+1}) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{2n+2}$
  Par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \psi(x_k,y_k) \leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right) + \psi(x_{n+1},y_{n+1})$$

  D'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \psi(x_k,y_k) \leqslant \psi\left(x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k, y_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} y_k\right)$$

  Ainsi la proposition est vraie au rang $n+1$.

Nous avons démontré par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{2n}$,
$\sum_{k=1}^{n} \psi(x_k,y_k) \leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right)$.

18. **Application.**
    Soient $p,q \in]1;+\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
    Dans cette question, $f : t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$.

    (a) Démontrer que f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

    f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right) x^{\frac{1}{p}-2}.$$

    Ainsi $f'' \leqslant 0$. Autrement dit

    f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

    (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{2n}$.
    En utilisant $(\star\star)$, démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En utilisant la fonction ψ associée à f de la question précédente nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(a_k^p, b_k^q) \leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p, \sum_{k=1}^{n} b_k^q\right).$$

Autrement dit on a successivement :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^q \left(\frac{a_k^p}{b_k^q}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{q-\frac{q}{p}} a_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Et puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nous avons finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.}$$