Capes de mathématique 2021 épreuve 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 5 heures.

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Notations.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Pour i et j deux entiers naturels tels que $i \leqslant j$, $[\![i;j]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $i \leqslant k \leqslant j$.

Partie A : étude des nombres harmoniques.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

I. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égale à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

* Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$ et $x \in [k-1,k]$.

$$k-1 \leqslant x \leqslant k$$

La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{k-1} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{k}$$

En intégrant, les applications étant continues :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k-1}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{k-1} \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{k}$$

* Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \geqslant 2 \Longrightarrow \frac{1}{k-1} \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{k},$$

nous en déduisons, pour $n \geqslant 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{k} \text{ et } \frac{1}{k} \geqslant \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Finalement :

pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k \geqslant 2$:

$$\boxed{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{k} \geqslant \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.}$$

II. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

Démontrons l'encadrement en procédant par disjonction des cas.

* Comme $\ln(2) \leqslant 1 = \ln(\mathrm{e})$ (par croissante de ln) on a :

$$\ln(1+1) \leqslant H_1 \leqslant 1 + \ln(1).$$

* Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
En sommant les encadrements, obtenus à la question précédente, terme à terme :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

D'après la relation de Chasles et en utilisant la notation H_n de l'énoncé :

$$\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant -1 + H_n \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Autrement dit, d'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant -1 + H_n \leqslant \ln(n).$$

Comme $\ln(2) \leqslant 1$:

$$\ln(n+1) - 1 \leqslant -1 + H_n \leqslant \ln(n).$$

Enfin

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{quelque soit } n \in \mathbb{N}^*, \\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.\end{array}}$$

III. À l'aide de la relation précédente :

1. Démontrer que la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

   $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leqslant H_n,$$

   donc par comparaison de suites :

   $$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

2. Démontrer que

   $$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
   Puisque $\ln(n) \neq 0$:

   $$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1.$$

   D'après la question A.II et puisque $\ln(n) > 0$:

   $$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)},$$

   Or $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \geqslant 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)} = 1$ (pour $n \geqslant 2$) donc par passage à la limite dans le précédent encadrement $\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$.

   $$\boxed{\text{Autrement dit : } H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

IV. On considère désormais les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n), \qquad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= -\ln(n) + \ln(n+1) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Et : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc : $\lim_{+\infty} u_n - v_n = 0$.

* Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n).$$

Notons $f : x \mapsto \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \\ &= -\frac{x}{(x+1)^2 x} - \frac{(x+1)x}{(x+1)^2 x} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 x} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2(x+2)} \end{aligned}$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

* Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1).$$

Notons $g : x \mapsto \frac{1}{x+2} - \ln(x+2) + \ln(x+1)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} \\ &= -\frac{x+2}{(x+1)^2(x+2)} - \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)} + \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^2(x+2)} \\ &= -\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} \end{aligned}$$

Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus $g(x) = \frac{1}{x+2} - \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Des points précédents nous déduisons que

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

2. En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive. Cette limite est notée γ.

* Puisque les suites sont adjacentes elles admettent une même limite $\gamma \in \mathbb{R}$ et de plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n.$$

* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et $v_1 = 1 - \ln(2) > 0$. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs positives. Nécessairement : $\gamma \geqslant 0$.

Il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$, tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers γ.

V. 1. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leqslant H_n - \ln(n) - \gamma \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme remarqué au cours de la question précédente :

$$v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n.$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &\leqslant \gamma - u_n \leqslant 0 \\ -\ln(n+1) + \ln(n) &\leqslant -H_n + \ln(n) + \gamma \leqslant 0 \\ -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &\leqslant -H_n + \ln(n) + \gamma \leqslant 0 \end{aligned}$$

Enfin :

$$\boxed{\begin{gathered}\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant H_n - \ln(n) - \gamma \geqslant 0.\end{gathered}}$$

2. Écrire en langage Python une fonction prenant comme argument un nombre réel ε strictement positif et renvoyant une valeur approchée de γ à ε près. On suppose que l'on dispose de la fonction `math.log()` pour le logarithme népérien.

```python
def gamma(epsilon):
  n=1
  H=1
  ecart=math.log(2)
  while ecart>epsilon:
    n=n+1
    ecart=math.log(1+1/n)
    H=H+1/n
  return H-math.log(n)
```

Partie B : le problème de Bâle.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$