Capes de mathématique 2020 épreuve 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Notations.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Pour i et j deux entiers naturels tels que $i \leqslant j$, $[\![i, j]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $i \leqslant k \leqslant j$.

Pour n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n.

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On identifie un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel dirigeant $\mathcal{P}$ et $\mathcal{B}$ la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, on note $||\vec{u}||$ sa norme euclidienne.

Définitions.

Un point pondéré est un couple (M, α), où M est un point de $\mathcal{P}$ et α un nombre réel. Pour tout entier naturel n non nul, un système de $n+1$ points pondérés est un $(n+1)$-uplet $((P_0, \alpha_0), \ldots, (P_n, \alpha_n))$. Le poids total de ce système de points pondérés est

$$\alpha = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.$$

Partie A : barycentres.

I Existence et caractérisation.

Soit n un entier naturel non nul et $((P_0, \alpha_0), \ldots, (P_n, \alpha_n))$ un système de $n+1$ points pondérés de poids total α.

1. On note f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ qui, à tout **point** M de $\mathcal{P}$ associe le **vecteur**

$$f(M) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i}.$$

(a) Soient M et N deux points de $\mathcal{P}$. Démontrer l'égalité vectorielle

$$f(M) = f(N) + \alpha\overrightarrow{NM}.$$

$$f(N) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{NP_i}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} f(N) &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP_i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{NM} + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{NM} + f(M) \\ &= \alpha\overrightarrow{NM} + f(M) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (M, N) \in \mathcal{P}^2,\ f(N) = f(M) + \alpha\overrightarrow{NM}.}$$

(b) Démontrer que, si $\alpha \neq 0$ alors f est injective et surjective.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

* Montrons que f est injective.

  Soit $(M, N) \in \mathcal{P}^2$ tel que $f(M) = f(N)$.
  D'après la question précédente on a donc :

$$\alpha\overrightarrow{MN} = \vec{0}$$

  Et puisque $\alpha \neq 0$:

$$\overrightarrow{MN} = \vec{0}$$

  Autrement dit $M = N$.
  Nous avons démontré que : $\forall (M, N) \in \mathcal{P}^2,\ f(M) = f(N) \Rightarrow M = N$.
  Autrement dit :

$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

* Montrons que f est surjective.

  Soient $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $O \in \mathcal{P}$.
  $\alpha \neq 0$ il est donc loisible de noter M l'image de O par la translation de vecteur $\frac{1}{\alpha}\left(f(O) - \vec{u}\right)$.
  Par construction nous avons alors :

$$\begin{aligned} f(M) &= f(O) + \alpha\overrightarrow{MO} \\ &= f(O) + \alpha\frac{1}{\alpha}\left(\vec{u} - f(O)\right) \\ &= \vec{u} \end{aligned}$$

  Nous avons démontré que : $\forall \vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}},\ \exists M \in \mathcal{P},\ f(M) = \vec{u}$.
  Autrement dit :

  $$\boxed{f \text{ est surjective.}}$$

(c) En déduire que f est bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$.

Démontrons l'équivalence proposée ar conditions nécessaire et suffisante.

* Nous avons établit à la question précédente que si $\alpha \neq 0$ alors f est surjective.
* Montrons la réciproque : si f bijective alors $\alpha \neq 0$.
  Pour cela démontrons la contraposée : si $\alpha = 0$ alors f n'est pas bijective.
  Supposons donc $\alpha = 0$.
  Soient M et N deux éléments de $\mathcal{P}$.
  D'après I.1.a : $f(M) = f(N) + 0\overrightarrow{MN} = f(N)$.
  Ainsi f est constante et n'est donc pas injective (car $\mathcal{P}$ n'est pas réduit à un élément).
  f n'étant pas injective elle n'est a fortiori pas bijective.
  Nous avons démontré la contraposée

Nous avons établi par condition nécessaire et suffisante que

$$\boxed{f \text{ est bijective si et seulement si } \alpha \neq 0.}$$

2. On suppose α non nul. Montrer qu'il existe un unique point G tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}.$$

Ce point G est appelé barycentre du système de points pondérés $((P_i, \alpha_i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$. On note

$$G = \mathrm{bar}\left((P_0, \alpha_0), \ldots, (P_n, \alpha_n)\right).$$

$\alpha \neq 0$ donc, d'après la question I.1.c, f réalise une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Or $\vec{0} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$,

$$\boxed{\text{il existe donc un unique } G \in \mathcal{P} \text{ tel que } f(G) = \vec{0}.}$$

3. On suppose que $\alpha \neq 0$ et on note G le barycentre du système $((P_i, \alpha_i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Montrer que, pour tout point M de $\mathcal{P}$,

$$\sum_{i=0} \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = \alpha \overrightarrow{MG}.$$

Soit $M \in \mathcal{P}$.
D'après la question I.1.a :

$$f(M) = f(G) + \alpha \overrightarrow{GM}$$

et donc, d'après la question précédente :

$$f(M) = \alpha \overrightarrow{GM}$$

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{P},\ \textstyle\sum_{i=0} \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = \alpha \overrightarrow{MG}.}$$

II Barycentre de deux points.

Soient P_0, P_1 deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

1. Quel est le barycentre du système de points pondérés $((P_0, 1), (P_1, 1))$?

   Le barycentre de $((P_0, 1), (P_1, 1))$ est le point G tel que :

   $$\overrightarrow{GP_0} + \overrightarrow{GP_1} = \vec{0}.$$

   Autrement dit

   $$\boxed{G \text{ est le milieu de } [P_0P_1].}$$

2. Démontrer que pour tout nombre réel t, le barycentre du système de points pondérés $((P_0, t), (P_1, 1-t))$ appartient à la droite (P_0P_1).

   Soit $t \in \mathbb{R}$.
   Notons G_t le barycentre de $((P_0, t), (P_1, 1-t))$.

   Démontrons que $G_t \in [P_0P_1]$.

   Par définition du barycentre :

   $$t\overrightarrow{G_tP_0} + (1-t)\overrightarrow{G_tP_1} = \vec{0}$$

   D'après la relation de Chasles et la bilinéarité du produit scalaire :

   $$\begin{aligned} t\overrightarrow{G_tP_0} + (1-t)\overrightarrow{G_tP_0} + (1-t)\overrightarrow{P_0P_1} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{G_tP_0} + (1-t)\overrightarrow{P_0P_1} &= \vec{0} \\ (1-t)\overrightarrow{P_0P_1} &= \overrightarrow{P_0G_t} \end{aligned}$$

   Ce qui correspond à la définition du fait que le point G_t appartient à la droite (P_0P_1). On peut évoquer la colinéarité caractérisant l'alignement si une autre définition est choisie.

   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \operatorname{bar}((P_0, t), (P_1, 1-t)) \in (P_0P_1).}$$

3. Soit M un point de la droite (P_0P_1).

   (a) Démontrer qu'il existe un unique nombre réel t tel que M soit le barycentre du système de points pondérés $((P_0, t), (P_1, 1-t))$.

   Démontrons l'existence et l'unicité de M en raisonnant par analyse-synthèse.

* Si M est le barycentre alors, en raisonnant comme en II.2, on doit avoir : $\overrightarrow{P_0M} = (1-t)\overrightarrow{P_0P_1}$. Autrement dit M est l'(unique) image de P_0 par la translation de vecteur $(1-t)\overrightarrow{P_0P_1}$.
* Réciproquement, supposons que M soit le point tel que $\overrightarrow{P_0M} = (1-t)\overrightarrow{P_0P_1}$.
  Vérifions que M est alors le barycentre de $((P_0,1),(P_1,1-t))$.

$$\begin{aligned} t\overrightarrow{MP_0} + (1-t)\overrightarrow{MP_1} &= t(t-1)\overrightarrow{P_0P_1} + (1-t)\left(\overrightarrow{MP_0} + \overrightarrow{P_0P_1}\right) \\ &= t(t-1)\overrightarrow{P_0P_1} + (1-t)\left((t-1)\overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_0P_1}\right) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Nous avons démontré par analyse-synthèse

> il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que M soit le barycentre de $((P_0,t),(P_1,1-t))$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur t pour que M soit un point du segment $[P_0P_1]$.

$M \in [P_0P_1]$ équivaut successivement à :

$$\exists t \in [0,1],\ \overrightarrow{P_0M} = t\overrightarrow{P_0P_1}$$
$$\exists t \in [0,1],\ \vec{0} = \overrightarrow{MP_0} + t\overrightarrow{P_0M} + t\overrightarrow{MP_1}$$
$$\exists t \in [0,1],\ \vec{0} = (1-t)\overrightarrow{MP_0} + t\overrightarrow{MP_1}$$

Ainsi

> $M \in [P_0P_1]$ si et seulement si il existe $t \in [0,1]$ tel que M soit le barycentre du système pondéré $((P_0,1-t),(P_1,t))$.

III Propriétés du barycentre.

1. **Homogénéité.**

(a) Soit λ un réel non nul. Montrer que le barycentre du système de points pondérés $((P_0,\lambda\alpha_0),(P_1,\lambda\alpha_1),\ldots,(P_n,\lambda\alpha_n))$, de poids total supposé non nul, est égal au barycentre du système de points pondérés

$((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), \ldots, (P_n, \alpha_n))$.

Soit G le barycentre de $((P_0, \lambda\alpha_0), (P_1, \lambda\alpha_1), \ldots, (P_n, \lambda\alpha_n))$.

Démontrons que G est barycentre de $((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), \ldots, (P_n, \alpha_n))$.

$((P_0, \lambda\alpha_0), (P_1, \lambda\alpha_1), \ldots, (P_n, \lambda\alpha_n))$ est de poids total non nul donc : $\sum_{k=0}^{n} \lambda\alpha_k \neq 0$. Or $\lambda \neq 0$ donc $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \neq 0$.

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda\alpha_k \overrightarrow{GP_k} = \vec{0}$$

$$\lambda \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \overrightarrow{GP_k} = \vec{0}$$

$\lambda \neq 0$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \overrightarrow{GP_k} = \vec{0}$$

Puisque $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \neq 0$,

> G est le barycentre du système de points pondérés $((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), \ldots, (P_n, \alpha_n))$.

(b) Soient trois points P_0, P_1, P_2 formant un triangle non aplati du plan $\mathcal{P}$. On suppose qu'il existe deux triplets $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ et $(\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2')$ de nombres réels, chacun de somme non nulle, tels que les barycentres des systèmes $((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), (P_2, \alpha_2))$ et $\left((P_0, \alpha_0'), (P_1, \alpha_1'), (P_2, \alpha_2')\right)$ soient égaux. On note alors M ce point.
Démontrer que $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ et $(\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2')$ sont proportionnels.
Indication : on pourra justifier que $\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\right)$ est une base de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et décomposer le vecteur $\overrightarrow{P_0M}$ dans cette base de deux façons différentes.

Démontrons que les triplets sont proportionnels.

* P_0, P_1, P_2 formant un triangle non aplati du plan $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_0P_2}$, qui ne sont pas nuls, ne sont pas colinéaires, et donc $\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\right)$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ qui est un espace vectoriel de dimension deux.

* Puisque M est barycentre de $((P_0,\alpha_0),(P_1,\alpha_1),(P_2,\alpha_2))$

$$\begin{aligned}
f(M) &= \vec{0} \\
f(P_0) + \alpha\overrightarrow{P_0M} &= \vec{0} \\
\overrightarrow{P_0M} &= -\frac{1}{\alpha}f(P_0) \\
\overrightarrow{P_0M} &= -\frac{\alpha_1}{\alpha}\overrightarrow{P_0P_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha}\overrightarrow{P_0P_2}
\end{aligned}$$

Ainsi les coordonnées de $\overrightarrow{P_0M}$ dans la base $\left(\overrightarrow{P_0P1},\overrightarrow{P_0P_2}\right)$ sont $\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha},-\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)$.

* De même les coordonnées de $\overrightarrow{P_0M}$ dans la base $\left(\overrightarrow{P_0P1},\overrightarrow{P_0P_2}\right)$ sont $\left(-\frac{\alpha_1'}{\alpha'},-\frac{\alpha_2'}{\alpha'}\right)$.
* Nous en déduisons par unicité des coordonnées relativement à une base : $\alpha_1' = \frac{\alpha'}{\alpha}\alpha_1$ et $\alpha_2' = \frac{\alpha'}{\alpha}\alpha_2$.
* Enfin de $\alpha_1'\alpha = \alpha_1\alpha'$ nous déduisons

$$\begin{aligned}
\alpha_1'\alpha_0 + \alpha_1'\alpha_1 + \alpha_1'\alpha_2 &= \alpha_1\alpha_0' + \alpha_1\alpha_1' + \alpha_1\alpha_2' \\
\alpha_1'\alpha_0 &= \alpha_1\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2 + \alpha_1\alpha_0'
\end{aligned}$$

Or, par proportionnalité $\alpha_1\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2 = 0$ donc

$$\begin{aligned}
\alpha_1'\alpha_0 &= \alpha_1\alpha_0' \\
\frac{\alpha'}{\alpha}\alpha_1\alpha_0 &= \alpha_1\alpha_0' \\
\frac{\alpha'}{\alpha}\alpha_0 &= \alpha_0'
\end{aligned}$$

Finalement

$\boxed{(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) \text{ et } (\alpha_0',\alpha_1',\alpha_2') \text{ sont proportionnels.}}$

2. **Associativité simple.**

(a) *Un cas particulier.*
Étant donnés trois points A, B, C du plan $\mathcal{P}$ et trois réels α, β, γ tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, on note $m_1 = \alpha+\beta$ et G_1 le barycentre du système $((A,\alpha),(B,\beta))$.

i. Démontrer que le barycentre du système $((G_1, m_1), (C, \gamma))$ est égale au barycentre du système $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$.

Notons G le barycentre de $((G_1, m_1), (C, \gamma))$.

Démontrons que G est barycentre de $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$.

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} &= \alpha\overrightarrow{GG_1} + \beta\overrightarrow{GG_1} + \alpha\overrightarrow{G_1A} + \beta\overrightarrow{G_1B} + \gamma\overrightarrow{GC} \\
&= m_1\overrightarrow{GG_1} + \alpha\overrightarrow{G_1A} + \beta\overrightarrow{G_1B} + \gamma\overrightarrow{GC} \\
&= m_1\overrightarrow{GG_1} + \gamma\overrightarrow{GC} \\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{G \text{ est barycentre de } ((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)).}$$

ii. En utilisant ce résultat, démontrer que les trois médianes d'un triangle non aplati sont concourantes en un point

Soient A, B et C trois points distincts et non alignés du plan.
Notons B' le milieu de $[AC]$ et G le barycentre de $((A, 1), (B, 1), (C, 1))$.

Montrons que $G \in (BB')$.

B' est le milieu de de $[AC]$ donc le barycentre de $((A, 1), (C, 1))$ d'après la question II.1.
D'après la question II.2.a.i, G est donc le barycentre de $\big((B, 1), (B', 2)\big)$.
Donc, d'après la question II.3.a,

$$\boxed{G \in (BB').}$$

Par symétrie on a également $G \in (AA')$ et $G \in (CC')$, autrement dit

$$\boxed{\text{les médianes du triangles sont concourantes en le barycentre de } ((A, 1), (B, 1), (C, 1)).}$$

(b) *Cas général.*

Soit n un entier naturel non nul, $I = [\![1,n]\!]$ et r un entier naturel non nul inférieur ou égale à n. On suppose que $I = J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_r$, les J_k ($k \in [\![0,r]\!]$) étant non vides et deux à deux disjoints. On considère un système de points pondérés $((P_i,\alpha_i); i \in I)$ avec $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \neq 0$. Pour tout $k \in [\![0,r]\!]$, on suppose que $\beta_k = \sum_{i\in J_k} \alpha_i \neq 0$ et on note Q_k le barycentre du système $((P_i,\alpha_i); i \in J_k)$.

Démontrer que $\sum_{k=0}^{r} \beta_k \neq 0$ et que

$$\mathrm{bar}\left((P_i,\alpha_i); i \in [\![0,n]\!]\right) = \mathrm{bar}\left((Q_k,\beta_k); k \in [\![0,r]\!]\right).$$

* Justifions $\sum k = 0^r \beta_k \neq 0$.

$$\sum_{k=0}^{r} \beta_k = \sum_{k=0}^{r} \sum_{i\in J_k} \alpha_i$$

Puisque les J_k sont disjoints deux à deux :

$$\sum_{k=0}^{r} \beta_k = \sum_{i\in\bigcup_{k=0}^{r} J_k} \alpha_i$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{r} \beta_k \neq 0.}$$

* Démontrons par équivalences qu'un point M est le barycentre de l'un des système sis et seulement si il est barycentre de l'autre.

M est le barycentre G de $((P_i,\alpha_i); i \in I)$ si et seulement si

$$\overrightarrow{MG} = \vec{0}$$

ce qui, comme $\sum_{i\in I}\alpha_i \neq 0$, équivaut à

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = \vec{0}$$
$$\sum_{k=0}^{r}\sum_{i\in J_k} \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = \vec{0}$$

d'après A.I.3, chaque Q_k étant un barycentre :

$$\sum_{k=0}^{r} \beta_k \overrightarrow{MQ_k} = \vec{0}$$

Ce qui équivaut à dire que M est le barycentre de $\left((Q_k,\beta_k); k\in [\![0,r]\!]\right)$ car $\sum_{k=0}^{r}\beta \neq 0$.
Ainsi

> un point est le barycentre de $\left((P_i,\alpha_i); i\in I\right)$ si et seulement s'il est le barycentre de $\left((Q_k,\beta_k); k\in [\![0,r]\!]\right)$.

3. **Associativité double.**
On considère deux entiers naturels p et n, un $n+1$-uplet $(P_0,\dots,P_n)$ de points de $\mathcal{P}$ et deux familles finies de réels $(\alpha_i)_{\substack{0\leqslant i\leqslant p\\ 0\leqslant j\leqslant n}}$ et $(\beta_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ vérifiant

$$\forall i\in [\![0,p]\!],\ \sum_{j=0}^{n}\alpha_{i,j} = 1 \text{ et } \sum_{i=0}^{p}\beta_i = 1.$$

Pour tout $i\in [\![0,p]\!]$, on note B_i le barycentre du système de points pondérés $\left((P_j,\alpha_{i,j}); j\in [\![0,n]\!]\right)$ et on note G le barycentre du système de points pondérés $\left((B_i,\beta_i); i\in [\![0,p]\!]\right)$.
Démontrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right) = 1$ et que G est le barycentre du système de points pondérés $\displaystyle\left(\left(P_j,\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right); j\in [\![0,n]\!]\right)$.

* Montrons : $\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right) = 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right) &= \sum_{i=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{n}\beta_i\alpha_{i,j}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{p}\beta_i\left(\sum_{j=0}^{n}\alpha_{i,j}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{p}\beta_i\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right) = 1.}$$

* Montrons que G est le barycentre.

Nous avons établi $\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right) \neq 0$.

Les sommes étant finies :

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right)\overrightarrow{GP_j} = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\overrightarrow{GP_j}\right)$$

b_i étant le barycentre de $\left((P_j,\alpha_{i,j});j\in[\![0,n]\!]\right)$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right)\overrightarrow{GP_j} &= \sum_{i=0}^{p}\beta_i\left(\sum_{j=0}^{n}\alpha_{i,j}\overrightarrow{GP_j}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{p}\beta_i\left(\sum_{j=0}^{n}\alpha_{i,j}\right)\overrightarrow{GB_i}\end{aligned}$$

Puisque $\sum_{j=0}^{n}\alpha_{i,j} = 1$,

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right)\overrightarrow{GP_j} = \sum_{i=0}^{p}\beta_i\overrightarrow{GB_i}$$

G étant le barycentre du système de points pondérés $((B_i,\beta_i);i\in[\![0,p]\!])$

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right)\overrightarrow{GP_j}=\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\right)\overrightarrow{GG}$$
$$=\vec{0}$$

Ainsi

$$\boxed{G \text{ est le barycentre du système } \left(\left(P_j,\textstyle\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right);j\in[\![0,n]\!]\right).}$$

IV Barycentres et applications affines.

Soit g une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. On rappelle que sa partie linéaire φ_g est l'unique endomorphisme de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ tel que, pour tous points A, B de $\mathcal{P}$,

$$\overrightarrow{g(A)g(B)}=\varphi_g(\overrightarrow{AB}).$$

Soit $((P_0,\alpha_0),\ldots,(P_n,\alpha_n))$ un système de points pondérés de poids total non nul. Démontrer que l'image par g du barycentre du système $((P_0,\alpha_0),\ldots,(P_n,\alpha_n))$ est le barycentre du système de points pondérés $((g(P_0),\alpha_0),\ldots,(g(P_n),\alpha_n))$.

Notons G le barycentre de $((P_0,\alpha_0),\ldots,(P_n,\alpha_n))$.

g étant affine :

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\overrightarrow{g(G)g(P_k)}=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_g\left(\overrightarrow{GP_k}\right)$$

φ_g étant linéaire :

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\overrightarrow{g(G)g(P_k)}=\varphi_g\left(\overrightarrow{\textstyle\sum_{k=0}^{n}\alpha_k GP_k}\right)$$

G étant le barycentre de $((P_0,\alpha_0),\ldots,(P_n,\alpha_n))$:

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\overrightarrow{g(G)g(P_k)}=\varphi_g\left(\vec{0}\right)$$

Par linéarité de φ_g :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \overrightarrow{g(G)g(P_k)} = \vec{0}$$

et donc

$$\boxed{g(G) \text{ est le barycentre de } ((g(P_0),\alpha_0),\dots,(g(P_n),\alpha_n)).}$$

Partie B : polynômes de Bernstein.

Pour tout entier naturel n et tout entier k de l'intervalle $[\![0,n]\!]$, on appelle k-ième polynôme de Bernstein de degré n le polynôme

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-x)^{n-k}.$$

V Propriétés des polynômes de Bernstein.

1. **Valeurs en** 0 **et en** 1.
   Démontrer que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\quad & B_{n,0}(0) = B_{n,n}(1) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1,n]\!],\quad & B_{n,k}(0) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0,n-1]\!],\quad & B_{n,k}(1) = 0 \end{aligned}$$

* Démontrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n,0}(0) = B_{n,n}(1) = 1.$

  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $B_{n,0}(0) = \binom{n}{0} 0^0 (1-0)^{n-0} = 1.$
  $B_{n,n}(1) = \binom{n}{n} 1^n (1-1)^{n-n} = 1.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n,0}(0) = B_{n,n}(1) = 1.}$$

* Démontrons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ B_{n,k}(0) = 0.$

  Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$.

$0^k = 0$ donc $B_{n,k}(0)\binom{n}{k}0^k(1-0)^{n-k} = 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \ B_{n,k}(0) = 0.}$$

* Démontrons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \ B_{n,k}(1) = 0.$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.
$(1-1)^{n-k} = 0$ donc $B_{n,k}(0)\binom{n}{k}1^k(1-1)^{n-k} = 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \ B_{n,k}(1) = 0.}$$

2. **Positivité.**
Démontrer que, pour tout nombre réel t dans l'intervalle $[0,1]$, tout entier naturel n et tout entier naturel k de $[\![0, n]\!]$,

$$B_{n,k}(t) \geqslant 0.$$

Démontrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall k \in [\![0, n]\!],\ \ \forall t \in [0,1],\ \ B_{n,k}(t) \geqslant 0.$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0, n]\!]$ et $t \in [0,1]$.
$\binom{n}{k} \geqslant 0$, $t^k \geqslant 0$ car $t \geqslant 0$ et $(1-t)^{n-k} \geqslant 0$ car $t \leqslant 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall k \in [\![0, n]\!],\ \ t \in [0,1],\ \ B_{n,k}(t) \geqslant 0.}$$

3. **Symétrie.**
Démontrer que, pour tout nombre réel t, tout entier naturel n et tout entier naturel k de $[\![0, n]\!]$,

$$B_{n,k}(t) = B_{n,n-k}(1-t).$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0, n]\!]$ et $t \in \mathbb{R}$.

Montrons : $B_{n,k}(t) = B_{n,n-1}(1-t)$.

$$B_{n,n-k}(1-t) = \binom{n}{n-k}(1-t)^{n-k}\left[1-(1-t)\right]^{n-(n-k)}$$

Or $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ donc

$$\begin{aligned} B_{n,n-k}(1-t) &= \binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k \\ &= B_{n,k}(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ t \in \mathbb{R},\ B_{n,k}(t) = B_{n,n-k}(1-t).}$$

4. **Partition de l'unité.**
Démontrer que, pour tout nombre réel t et tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) = 1.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0,n]\!]$, $t \in \mathbb{R}$.

Montrons que la somme des $B_{n,k}$ égale 1.

D'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} &= [t+(1-t)]^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \textstyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) = 1.}$$

5. **Relations de récurrence.**

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 et tout nombre réel t,

$$B_{n,0}(t) = (1-t)B_{n-1,0}(t),$$
$$B_{n,n}(t) = tB_{n-1,n-1}(t).$$

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, tout entier naturel k de $[\![1,n-1]\!]$ et tout nombre réel t,

$$B_{n,k}(t) = (1-t)B_{n-1,k}(t) + tB_{n-1,k-1}(t).$$

VI Dérivabilité et maximum.

Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.

1. Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $B_{n,k}$ est dérivable et démontrer les égalités suivantes, valables pour tout nombre réel t :

$$\begin{aligned} B'_{n,0}(t) &= -nB_{n-1,0}(t), \\ B'_{n,n}(t) &= nB_{n-1,n-1}(t), \\ \forall n \in [\![1, n-1]\!],\ B'_{n,k}(t) &= n\left(B_{n-1,k-1}(t) - B_{n-1,k}(t)\right). \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$B'_{n,k}(0) = \begin{cases} -n \text{ si } k = 0, \\ n \text{ si } k = 1, \\ 0 \text{ si } k \geqslant 2. \end{cases} \qquad B'_{n,k}(1) = \begin{cases} n \text{ si } k = n, \\ -n \text{ si } k = n-1, \\ 0 \text{ si } k \leqslant n-2. \end{cases}$$

3. Soit k dans $[\![0, n]\!]$. Démontrer que la fonction, qui à tout nombre réel t de l'intervalle $[0, 1]$ associe $B_{n,k}(t)$, admet un unique maximum, atteint en $\dfrac{k}{n}$. Donner la valeur de ce maximum.

VII Un peu d'algèbre linéaire.

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé et on définit les polynômes $\Phi_n(P)$ et $\Psi_n(P)$ par :

$$\Phi_n(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X), \quad \Psi_n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X).$$

1. Démontrer que Φ_n et Ψ_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Démontrer que, pour tout entier k dans $[\![0, n]\!]$,

$$\Phi_n(B_{n,k})(X) = kB_{n,k}(X).$$

3. En déduire que $\left(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_n(X)$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Démontrer que Φ_n n'est pas bijectif et que Ψ_n est bijectif.

Partie C : courbes de Bézier.

Les courbes de Bézier ont été inventées à la fin des années 1950 par Pierre Bézier, ingénieur des usines Renault, pour tracer des profils de carrosserie à l'aide d'un logiciel. Ces courbes sont également utilisées pour concevoir les polices de caractères dites polices vectorielles, comme la police Postscript.

Définition.

Soit n un entier naturel non nul et $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ un $n+1$-uplet de points de $\mathcal{P}$. L'ensemble des points $M(t) = \operatorname{bar}\left((P_0, B_{n,0}(t)), (P_1, B_{n,1}(t)), \ldots, (P_n, B_{n,n}(t))\right)$, lorsque t décrit l'intervalle $[0,1]$, s'appelle la courbe de Bézier de points de contrôle $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$. On note cette courbe $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n))$. Le point $M(t)$ est le point de $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n))$ de paramètre t.

VIII

1. Montrer que, pour t appartenant à l'intervalle $[0,1]$, $M(t)$ est bien défini.

2. Montrer que, pour t appartenant à l'intervalle $[0,1]$

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\overrightarrow{OP_k}.$$

3. Démontrer que les points P_0 et P_n appartiennent à la courbe de Bézier $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n))$.

IX

On considère la courbe de Bézier Γ associée aux points de contrôle $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n)$ et la courbe de Bézier Γ' associée aux points de contrôle $(P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1, P_0)$ (la liste des points de contrôle de Γ' est parcourue en sens inverse de celle des points de contrôle de Γ).

Pour tout réel $t \in [0,1]$ on pose :

$$\begin{aligned} M(t) &= \operatorname{bar}\left((P_0, B_{n,0}(t)), (P_1, B_{n,1}(t)), \ldots, (P_{n-1}, B_{n,n-1}(t)), (P_n, B_{n,n}(t))\right), \\ N(t) &= \operatorname{bar}\left((P_n, B_{n,n}(t)), (P_{n-1}, B_{n,n-1}(t)), \ldots, (P_1, B_{n,1}(t)), (P_0, B_{n,0}(t))\right). \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $M(t) = N(1-t)$.

2. Que peut-on en déduire pour les courbes de Bézier Γ et Γ' ?

X Dans cette question on suppose que P_0 et P_1 sont distincts et que P_n et P_{n-1} sont distincts.

Montrer qu'un vecteur tangent en P_0 à $\Gamma\left((P_0, \ldots, P_n)\right)$ est $n\overrightarrow{P_0P_1}$ et préciser un vecteur tangent en P_n à $\Gamma\left((P_0, \ldots, P_n)\right)$.

XI

Soit g une application affine