CAPES de mathématiques
Option Mathématiques–Session 2018

Le sujet est comporte cinq parties.

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.
Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m;n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
On note e le nombre $\exp(1)$, image de 1 par la fonction exponentielle.
On rappelle que, pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif $E(x)$ tel que $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$. Cet entier $E(x)$ est appelé *partie entière de x*.

Partie A : suites adjacentes

Étant donné deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on rappelle qu'elle sont dites *adjacentes* si l'une des deux est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

I. On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

1. Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et en déduire que pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$.

2. Justifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite ℓ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant \ell \leqslant b_n.$$

3. On suppose de plus les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement monotones. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n < \ell < b_n.$$

II. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{e} - a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.
Indication : on pourra procéder par récurrence.

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 < \mathrm{e} - a_n < \dfrac{1}{n \times n!}$.
En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Indication : on pourra étudier les variation de la fonction $t \mapsto (1-t)e^t$.

4. En déduire une valeur de n telle que a_n soit une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

5. On suppose que e est un nombre rationnel.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q tel que le nombre e $q!$ soit un entier naturel.

b. Montrer que $x = q!\left(\mathrm{e} - \sum_{p=0}^{q} \frac{1}{p!}\right)$ est un entier naturel.

c. Montrer que $0 < x < 1$.

d. Conclure.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. On rappelle que f est dite *développable en série entière* au voisinage de 0 s'il existe un nombre réel $R > 0$ et une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels tels que $]-R, R[$ est inclus dans I et :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

III. 1. Démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est développable en série entière au voisinage de 0. Préciser son développement et donner le rayon de convergence de cette série entière.

2. Justifier que, pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]-1, 1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

On énoncera avec soin le théorème utilisé.

3. Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Démontrer que les deux suites $(S_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x dans l'intervalle $[0, 1[$,

$$S_{2n+1}(x) \leqslant \ln(1+x) \leqslant S_{2n}(x)$$

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$S_{2n+1}(1) \leqslant \ln(2) \leqslant S_{2n}(1).$$

6. Démontrer que $\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Partie B : écriture d'un entier en base deux

Le but de cette partie est de démontrer que tout entier naturel N supérieur ou égal à 2 s'écrit de manière unique

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k \quad \text{avec} \quad n \geqslant 2 \text{ et } \begin{cases} \forall k \in [\![0\ ;\ n-2]\!], & d_k \in \{0, 1\}, \\ d_{n-1} = 1. \end{cases}$$

L'égalité précédente se note $N = \overline{d_{n-1}d_{n-2}\dots d_0}$ (écriture de N en base deux) ; la suite finie $(d_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ s'appelle la suite des chiffres dans l'écriture de N en base deux.

Dans toute cette partie, N désigne un entier naturel supérieur ou égal 2.

IV. On suppose que $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$ avec $\forall k \in [\![0 \ ; \ n-2]\!] \quad d_k \in \{0,1\}$ et $d_{n-1} = 1$.

1. Montrer que $2^{n-1} \leqslant N \leqslant 2^n - 1$.

2. Montrer que d_0 est le reste de la division euclidienne de N par 2.

3. Démontrer que la suite $(d_0, \ldots, d_{n-1})$ est déterminée de manière unique.

V. On définit deux suites d'entiers $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $y_0 = N$ et pour tout entier naturel k, y_{k+1} et d_k désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de y_k par 2.

1. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer N en fonction de k, $d_0, \ldots, d_{k-1}$ et y_k.

2. Démontrer que la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang et qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\overline{d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_0}$ soit l'écriture de N en base deux.

3. Écrire un algorithme qui, pour tout entier naturel N supérieur ou égal 2 donné, renvoie la suite $(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})$ des chiffres de son écriture en base deux.

4. Écrire en base deux le nombre qui s'écrit 391 en base dix.

VI. On se propose à présent de calculer le nombre N qui s'écrit $\overline{d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_0}$ en base deux.

1. Première méthode : méthode « naïve ».
On écrit $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$. Combien d'opérations (additions et multiplications) doit-on effectuer a priori pour calculer N avec cette méthode ?

2. Deuxième méthode : méthode de Hörner.
On écrit $N = ((((d_{n-1} \times 2 + d_{n-2}) \times 2 + d_{n-3}) \times 2 + \ldots) \times 2 + d_0$. Combien d'opérations (additions et multiplications) doit-on effectuer a priori pour calculer N avec cette méthode ?

3. Écrire un algorithme qui, pour toute suite de chiffres $(d_0, \ldots, d_{n-1})$ donnée, renvoie la valeur de N calculée à l'aide de cette deuxième méthode.

4. Quel est le nombre dont l'écriture en base deux est $\overline{101001000100001}$?

Partie C : nombres dyadiques

L'ensemble $D_2 = \left\{ \frac{a}{2^p} \ ; a \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N} \right\}$ est appelé ensemble des nombres dyadiques. On note D_2^+ l'ensemble des nombres dyadiques positifs ou nuls.

VII. Montrer que $\mathbb{Z}$ est strictement inclus dans D_2 et que D_2 est strictement inclus dans $\mathbb{Q}$. *Indication :* on pourra montrer que $\frac{1}{3} \notin D_2$.

VIII. Soit $x \in D_2^+ \backslash \mathbb{N}$. On se propose de démontrer qu'il existe un unique entier $n \geqslant 1$ et une unique suite $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ tels que

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k 2^{-k}, \quad \text{avec } a_n \neq 0.$$

Le membre de droite de cette égalité s'appelle le développement dyadique de x.

1. On suppose qu'une telle suite existe. Montrer que $a_0 = E(x)$ puis montrer que la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est déterminée de manière unique.

2. On souhaite à présent montrer l'existence d'une telle suite. À l'aide de la partie précédente, montrer l'existence d'un entier a_0, d'un entier $p \geqslant 1$ et d'une suite de nombres entiers $d_0, \ldots, d_{p-1}$ égaux à 0 ou 1, non tous nuls, tels que

$$x = a_0 + \sum_{k=0}^{p-1} d_k 2^{k-p}.$$

3. Conclure.

IX. Donner le développement dyadique de $\dfrac{35}{4}$.

Partie D : développement dyadique illimité

On appelle suite dyadique toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a_k est un élément de $\{0, 1\}$. De plus :

— une suite dyadique $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est dite impropre s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geqslant m$, $a_k = 1$;

— une suite dyadique $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est dite propre si elle n'est pas impropre.

X. On suppose que $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique.

1. Démontrer que la série de terme général $a_k 2^{-k}$ est convergente. On note sa somme $s(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}$.

2. Soit N un entier naturel. Que vaut $\sum_{k=N}^{+\infty} 2^{-k}$?

3. Vérifier que $s(a) \in [0, 1]$.

4. Montrer que si a est une suite dyadique propre, alors $s(a) \in [0, 1[$.

5. Montrer que si a est une suite dyadique impropre, alors $s(a)$ est un nombre dyadique.

6. Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$a_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est impair,} \\ 1 \text{ si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Montrer que $s(a) = \dfrac{1}{3}$.

XI. Soit x un nombre dyadique compris dans l'intervalle $[0, 1[$.

1. En utilisant les résultats de la partie C, montrer qu'il existe une suite dyadique propre a telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}.$$

2. Montrer que si x est non nul, alors il existe également une suite dyadique impropre b telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 2^{-k}.$$

XII. Dans cette question, on considère un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1[$. On lui associe la suite $\alpha(x) = (\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par l'égalité

$$\alpha_k(x) = E(2^k x) - 2E(2^{k-1}x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)2^{-k}$ et $v_n(x) = u_n(x) + 2^{-n}$.

1. Démontrer que la suite $(\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique.

2. Démontrer que les deux suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et prennent leurs valeurs dans $D_2 \cap [0,1]$.

3. Vérifier que $E(2^n x) = 2^n u_n(x)$ et en déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n(x) \leqslant x < v_n(x).$$

4. Quelle est la limite commune des suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$?

5. Montrer que $(\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique propre et que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(x)2^{-k}.$$

6. En déduire que pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0,1[$, il existe une unique suite dyadique propre $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}.$$

On note alors

$$x = \overline{0, a_1a_2a_3...}$$

Cette nouvelle représentation de x est appelée la *représentation dyadique propre* de x. Si la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est nulle à partir d'un certain rang, on dit que la représentation dyadique de x est finie.

7. Si $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique propre, on note $x = s(d)$ et $d' = (d_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Justifier que $d_1 = E(2x)$ et $s(d') = 2x - d_1$.
En déduire un algorithme qui prend en entrées un nombre réel $x \in [0,1[$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la liste des n premiers chiffres du développement dyadique propre de x. On admettra l'existence d'une fonction *floor* qui renvoie la partie entière de son argument.

XIII. Démontrer que $D_2 \cap [0,1]$ est dense dans $[0,1]$. En déduire que D_2 est dense dans $\mathbb{R}$.

XIV. Démontrer que $\mathbb{R}\backslash D_2$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra utiliser la question VII.

XV. Soit x un nombre réel dans l'intervalle $\in [0,1[$ dont un développement dyadique, propre ou impropre, est $\overline{0, a_1a_2a_3\ldots}$

1. Quel est le développement dyadique de $1-x$?

2. On suppose que $2x \in [0,1[$. Quel est le développement dyadique de $2x$? Plus généralement, quel est le développement dyadique de $2^l x$, lorsque l est un entier relatif et que $2^l x \in [0,1[$?

3. Donner le développement dyadique de $\dfrac{2}{3}$.

Partie E : suite extraite de la suite $(\cos(n\pi\theta))_{n\in\mathbb{N}}$

XVI. Dans cette question, θ désigne un nombre réel strictement positif. On pose

$$c_n = \cos(n\pi\theta), \qquad\qquad s_n = \sin(n\pi\theta).$$

1. Vérifier que pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} c_{n+1} + c_{n-1} &= 2c_n \cos(\pi\theta), \\ c_{n+1} - c_{n-1} &= -2s_n \sin(\pi\theta), \\ c_n^2 + s_n^2 &= 1. \end{aligned}$$

2. En déduire que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si θ est un entier relatif pair.
Indication : on pourra raisonner par disjonction de cas, suivant la valeur de $\cos(\pi\theta)$.

XVII. On s'intéresse à présent à la suite $(c_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = c_{2^n} = \cos(2^n\pi\theta).$$

1. On suppose (dans cette question uniquement) que θ est un nombre dyadique. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. On suppose (dans cette question uniquement) qu'il existe un nombre dyadique x tel que $\theta = x + \dfrac{1}{3}$. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. On suppose (dans cette question uniquement) qu'il existe un nombre dyadique x tel que $\theta = x + \dfrac{2}{3}$. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$.

5. Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, quelles sont les seules valeurs possibles pour le réel ℓ ?

6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définissant le développement dyadique propre de $\theta - E(\theta)$. Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, il existe un entier relatif k_n et un réel ε_n appartenant à l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ tels que :

$$2^n\theta = 2k_n + a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \varepsilon_n.$$

7. Démontrer que :
— si $a_n = a_{n+1}$, alors $u_n \geqslant 0$;
— si $a_n \neq a_{n+1}$, alors $u_n \leqslant 0$.
Puis que :
— si $u_n > 0$, alors $a_n = a_{n+1}$;
— si $u_n < 0$, alors $a_n \neq a_{n+1}$.

8. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel $\ell > 0$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $a_n = 0$. En déduire que θ est un nombre dyadique.

9. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel $\ell < 0$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $a_{n+1} \neq a_n$. En déduire que $\theta - \dfrac{1}{3}$ ou $\theta - \dfrac{2}{3}$ est un nombre dyadique.

XVIII. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On justifiera ce résultat et on précisera le cas échéant la valeur de sa limite.