Capes de mathématique 2018 épreuve 1.

Lien vers le corrigé seul : [pdf](#).

Lien vers le sujet seul : [pdf](#).

Le sujet comporte cinq parties.

Notations.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.

Pour m et n deux entiers naturels, $[[m, n]]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leq k \leq n$.

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

On note e le nombre $\exp(1)$, image de 1 par la fonction exponentielle.

On rappelle que, pour tout nombre réel x , il existe un unique entier relatif $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$. Cet entier $E(x)$ est appelé *partie entière de x* .

Partie A : suites adjacentes.

Étant données deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on rappelle qu'elles sont dites *adjacentes* si l'une des deux est croissante, l'autre décroissante et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$.

1. On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(a) Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et en déduire que pour tout entier naturel n , $a_n \leq b_n$.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(-b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont croissantes donc $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi.
Puisque de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$ nécessairement $a_n - b_n \leq 0$.

(b) Justifier que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite ℓ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell \leq b_n.$$

l'une est croissante et majorée et l'autre est décroissante et minorée donc elle sont convergente. Comme la limite de la différence est 0 elle ont la même limite.

- (c) On suppose de plus les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement monotones. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n < \ell < b_n.$$

Par l'absurde : si égalité pour un certain rang alors la suite est constante et contredit la stricte monotonie.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n \times n!}$.

- (a) Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

(a_n) est clairement strictement croissante comme somme de termes strictement positifs.

$b_{n+1} - b_n < 0$ donc suite strictement décroissante.

$$b_n - a_n = \frac{1}{n \times n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- (b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $e - a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

Indication : on pourra procéder par récurrence.

$$e - a_{n+1} = e - a_n - \frac{1}{(n+1)!} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt \text{ avec une intégration par parties.}$$

- (c) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 < e - a_n < \frac{1}{n \times n!}$. En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Indication : on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto (1-t)e^t$.

- (d) En déduire une valeur de n telle que a_n soit une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

$$a_7.$$

- (e) On suppose que e est un nombre rationnel.

- i. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q tel que le nombre $eq!$ soit un entier naturel.

Si $e = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ alors $b!e \in \mathbb{Z}$. D plus $e > 0$ donc $a > 0$ et $b!e \in \mathbb{N}$.

ii. Montrer que $x = q! \left(e - \sum_{p=0}^q \frac{1}{p!} \right)$ est un entier naturel.

$$q!e \in \mathbb{N}, \frac{q!}{p!} \in \mathbb{N} \text{ car } p \leq q \text{ donc } x \in \mathbb{Z}. e - a_q > 0 \text{ donc } x \in \mathbb{N}.$$

iii. Montrer que $0 < x < 1$.

$$\frac{1}{q \times q!} > e - a_q > 0 \text{ donc } 1 > x > 0.$$

iv. Conclure.

Contradiction entre les deux précédentes réponse. Démonstration par l'absurde de l'irrationalité de e .

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 . On rappelle que f est dite *développable en série entière* au voisinage de 0 s'il existe un nombre réel $R > 0$ et une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels tels que $] -R, R[$ est inclus dans I et :

$$\forall x \in] -R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

3. (a) Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est développable en série entière au voisinage de 0 . Préciser son développement et donner son rayon de convergence de cette série entière.

$$\forall x \in] -1, 1[, \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k \text{ somme d'une suite géométrique.}$$

(b) Justifier que, pour tout nombre réel x dans l'intervalle $] -1, 1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

On énoncera avec soin le théorème utilisé.

Hypothèses.

* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

* Soit $R \in]0, 1[$. $\sum_n x \mapsto (-1)^n x^n$ converge normalement sur $[-R, R]$, donc uniformément, car $\|(-1)^n x^n\|_{\infty, [-R, R]} = R^n$.

* $\sum_n (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge.

On en déduit que

- $\sum_{n \geq 0} x \mapsto (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge localement uniformément sur $] -1, 1[$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; 1[$.
- $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

Et donc : $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x)$.

(c) Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Démontrer que les deux suites $(S_{2n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

$$S_{2n+1}(x) - S_{2n}(x) = -\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$S_{2n+2}(x) - S_{2n}(x) = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq 0.$$

$$S_{2n+3}(x) - S_{2n+1}(x) \geq 0.$$

(d) En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$S_{2n+1}(x) \leq \ln(1+x) \leq S_{2n}(x).$$

(e) En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$S_{2n+1}(1) \leq \ln(2) \leq S_{2n}(1).$$

(f) Démontrer que $\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

$$S_{2n+1}(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2) \text{ et } S_{2n}(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2) \text{ donc } S_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2).$$

Partie B : écriture d'un entier en base deux .

Le but de cette partie est de démontrer que pour tout entier naturel N supérieur ou égale à 2 s'écrit de manière unique

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k \text{ avec } n \geq 2 \text{ et } \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, d_k \in \{0; 1\} \\ d_{n-1} = 1 \end{cases}$$

L'égalité précédente se note $N = \overline{d_{n-1}d_{n-2} \dots d_0}$ (écriture de N en base deux) ; la suite finie $(d_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ s'appelle la suite des chiffres dans l'écriture de N en base deux.

Dans toute cette partie, N désigne un entier naturel supérieur ou égale à 2.

4. On suppose que $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$ avec : $\forall k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$, $d_k \in \{0; 1\}$ et $d_{n-1} = 1$.
- (a) Montrer que $2^{n-1} \leq N \leq 2^n - 1$.
 En sommant les $0 \leq d_k \leq 1$.
- (b) Montrer que d_0 est le reste de la division euclidienne de N par 2.
 $N = 2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} d_k 2^{k-1} \right) + d_0$ avec $0 \leq d_0 < 2$ donc d_0 est le reste.
- (c) Démontrer que la suite $(d_0, \dots, d_{n-1})$ est déterminée de manière unique.
5. On définit deux suites d'entiers $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $y_0 = N$ et pour tout entier naturel k , y_{k+1} et d_k désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de y_k par 2.
- (a) On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer N en fonction de k , $d_0, \dots, d_{k-1}$ et y_k .
- (b) Démontrer que la suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang et qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\overline{d_{n-1}d_{n-2} \dots d_0}$ soit l'écriture de N en base deux.
- (c) Écrire un algorithme qui, pour tout entier naturel N supérieur ou égale à 2 donné, renvoie la suite $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$ des chiffres de son écriture en base deux.
- (d) Écrire en base deux le nombre qui s'écrit 391 en base dix.
6. On se propose à présent de calculer le nombre N qui s'écrit $\overline{d_{n-1}d_{n-2} \dots d_0}$.
- (a) Première méthode : méthode « naïve ».
 On écrit $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$. Combien d'opérations (additions et multiplications) doit-on effectuer a priori pour calculer N avec cette méthode ?
- (b) Deuxième méthode : méthode de Hörner.
 On écrit $N = (((d_{n-1} \times 2 + d_{n-2}) \times 2 + d_{n-3}) \times 2 + \dots) \times 2 + d_0$. Combien d'opérations (additions et multiplications) doit-on effectuer a priori pour calculer N avec cette méthode ?
- (c) Écrire un algorithme qui, pour toute suite de chiffres $(d_0, \dots, d_{n-1})$ donnée, renvoie la valeur de N calculée à l'aide de cette deuxième méthode.
- (d) Quel est le nombre dont l'écriture en base deux est $\overline{101001000100001}$.

Partie C : nombres dyadiques.

L'ensemble $D_2 = \left\{ \frac{a}{2^p}; a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}$ est appelé ensemble des nombres dyadiques. On note D_2^+ l'ensemble des nombres dyadiques positifs ou nuls.

7. Montrer que $\mathbb{Z}$ est strictement inclus dans D_2 et que D_2 est strictement inclus dans $\mathbb{Q}$. *Indication* : on pourra montrer que $\frac{1}{3} \in D_2$.
8. Soit $x \in D_2^+ \setminus \mathbb{N}$. On se propose de démontrer qu'il existe un unique entier $n \geq 1$ et une unique suite $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \{0; 1\}^n$ tels que

$$x = \sum_{k=0}^n a_k 2^{-k}, \text{ avec } a_n \neq 0.$$

Le membre de droite de cette égalité s'appelle le développement dyadique de x .

- (a) On suppose qu'une telle suite existe. Montrer que $a_0 = E(x)$ puis montrer la suite $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est déterminée de manière unique.
- (b) On souhaite à présent montrer l'existence d'une telle suite. À l'aide de la partie précédente, montrer l'existence d'un entier a_0 , d'un entier $p \geq 1$ et d'une suite de nombres entiers $d_0, \dots, d_{p-1}$ égaux à 0 ou 1, non tous nuls, tels que

$$x = a_0 + \sum_{k=0}^{p-1} d_k 2^{k-p}.$$

- (c) Conclure.

9. Donner le développement dyadique de $\frac{35}{4}$.

Partie D : développement illimité.

On appelle suite dyadique toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a_k est un élément de $\{0, 1\}$. De plus :

- une suite dyadique $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est dite impropre s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geq m$, $a_k = 1$;
- une suite dyadique $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est dite propre si elle n'est pas impropre.

10. On suppose que $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique.

- (a) Démontrer que la série de terme général $a_k 2^{-k}$ est convergente. On note sa somme $s(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}$.
- (b) Soit N un entier naturel. Que vaut $\sum_{k=N}^{+\infty} 2^{-k}$?
- (c) Vérifier que $s(a) \in [0,1]$.
- (d) Montrer que si a est une suite dyadique propre, alors $s(a) \in [0,1[$.
- (e) Montrer que si a est une suite dyadique impropre, alors $s(a)$ est un nombre dyadique.
- (f) Soit $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ 1 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Montrer que $s(a) = \frac{1}{3}$.

11. Soit x un nombre dyadique compris dans l'intervalle $[0,1[$.

- (a) En utilisant les résultats de la partie C, montrer qu'il existe une suite dyadique propre a telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}.$$

- (b) Montrer que si x est non nul, alors il existe également une suite dyadique impropre b telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 2^{-k}.$$

12. Dans cette question, on considère un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0,1[$. On lui associe la suite $\alpha(x) = (\alpha_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par égalité

$$\alpha_k(x) = E(2^k x) - 2E(2^{k-1} x).$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) 2^{-k}$ et $v_n(x) = u_n(x) + 2^{-n}$.

- (a) Démontrer que la suite $(\alpha_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique.

(b) Démontrer que les deux suites $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et prennent leurs valeurs dans $D_2 \cap [0; 1]$.

(c) Vérifier que $E(2^n x) = 2^n u_n(x)$ et en déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n(x) \leq x < v_n(x).$$

(d) Quelle est la limite commune des suites $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$?

(e) Montrer que $(\alpha_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique propre et que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(x) 2^{-k}.$$

(f) En déduire que pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0; 1[$, il existe une unique suite dyadique propre $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}.$$

On note alors $x = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$.

Cette nouvelle représentation de x est appelée la *représentation dyadique propre* de x . Si la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est nulle à partir d'un certain rang, on dit que la représentation dyadique de x est finie.

(g) Si $d = (d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique propre, on note $x = s(d)$ et $d' = (d_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Justifier que $d_1 = E(2x)$ et $s(d') = 2x - d_1$.

En déduire un algorithme qui prend en entrées un nombre réel $x \in [0; 1[$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la liste des n premiers chiffres du développement dyadique propre de x . On admettra l'existence d'une fonction *floor* qui renvoie la partie entière de son argument.

13. Démontrer que $D_2 \cap [0; 1]$ est dense dans $[0; 1]$. En déduire que D_2 est dense dans $\mathbb{R}$.

14. Démontrer que $\mathbb{R} \setminus D_2$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication : on pourra utiliser la question 7.

15. Soit x un nombre réel dans l'intervalle $[0; 1[$ dont un développement dyadique, propre ou impropre, est $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$.

(a) Quel est le développement dyadique de $1 - x$?

- (b) On suppose que $2x \in [0; 1[$. Quel est le développement dyadique de $2x$?
Plus généralement quel est le développement dyadique de $2^l x$, lorsque l est un entier relatif et que $2^l x \in [0; 1[$?
- (c) Donner le développement dyadique de $\frac{2}{3}$.

Partie E : suite extraite de la suite $(\cos(n\pi\theta))_{n \in \mathbb{N}}$.

16. Dans cette question, θ désigne un nombre réel strictement positif. On pose

$$c_n = \cos(n\pi\theta) \quad s_n = \sin(n\pi\theta).$$

- (a) Vérifier que pour tout entier naturel n