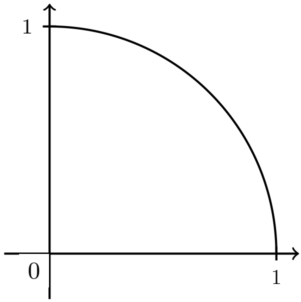
Capes externe de mathématique épreuve 2.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

I Problème 1.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On considère le quart de cercle unité du plan usuel, représenté sur la figure ci-dessous :



1. Quelle est l'aire $\mathcal{A}$ du quart de disque $\mathcal{D}$ délimité par les deux axes de coordonnées et ce quart de cercle ?

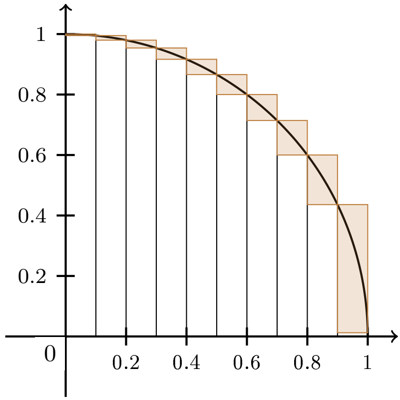
2. Montrer que cette aire est également la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   Par la suite, on considère la fonction

$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$$

3. On s'intéresse tout d'abord à une évaluation de $\mathcal{A}$ grâce à la *méthode des rectangles*.



On fixe un entier naturel $n \geq 2$. On introduit une subdivision

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

à pas constant de l'intervalle $[0,1]$, c'est-à-dire que :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ x_i = \frac{i}{n}.$$

Pour $i \in [\![0,n[\![$, on considère les points $A_i\,(x_i,\phi(x_i))$ et, pour $i \in [\![0,n-1]\!]$, on construit sur chaque intervalle $[x_i,x_{i+1}]$ le rectangle *au dessous de la courbe* de sommets

$$(x_i,0),\quad (x_{i+1},0),\quad (x_{i+1},\phi(x_{i+1})),\quad (x_i,\phi(x_{i+1}))$$

et le rectangle au dessus de la courbe de sommets

$$(x_i,0),\quad (x_{i+1},0),\quad (x_{i+1},\phi(x_i)),\quad (x_i,\phi(x_i)).$$

On a représenté ces rectangles pour $n = 10$ sur la figure ci-dessus. La différence ensembliste de ces rectangles a été grisée.
On note $\check{s}(n)$ la somme des aires des rectangles au-dessous de la courbe et $\hat{s}(n)$ la somme des aires des rectangles au-dessus de la courbe.

(a) Un élève de terminale scientifique affirme à propos de cette méthode : « Plus le nombre de rectangle augmente, plus les sommets des rectangles se rapprochent de la courbe, donc la somme des aires des rectangles tend vers $\mathcal{A}$ ». Que répondez-vous à cet élève ?

(b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\check{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) \leq \mathcal{A} \leq \hat{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \phi(x_i).$$

(c) Montrer que la somme des aires des rectangles grisés sur la figure précédente est

$$\hat{s}(n) - \check{s}(n) = \frac{1}{n}.$$

(d) Déterminer un entier N tel que, pour $n \geq N$, on ait $|\mathcal{A} - \hat{s}(n)| \leq 10^{-3}$.

(e) Représenter sur une même figure $\hat{s}(2)$, $\check{s}(2)$, $\hat{s}(4)$ et $\check{s}(4)$. Comparer $\hat{s}(2)$ et $\hat{s}(4)$, puis $\check{s}(2)$ et $\check{s}(4)$.

(f) Montrer que les suites de terme général $\hat{s}(2^n)$ et $\check{s}(2^n)$ sont adjacentes.

(g) En quoi ce résultat peut-il vous aider à répondre à l'élève de la question (a) ?

(h) Écrire un algorithme de calcul de $\hat{s}(n)$.

4. On s'intéresse ici à une évaluation de $\mathcal{A}$ grâce à la méthode dite *méthode des trapèzes*.
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note

$$s(n) = \frac{\hat{s}(n) + \check{s}(n)}{2}.$$

(a) Justifier le nom de *méthode des trapèzes*. On représentera $s(4)$ sur une figure.

(b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\check{s}(n) \leq s(n) \leq \hat{s}(n)$.

(c) Indiquer laquelle des trois valeurs $\hat{s}(n)$, $\check{s}(n)$ ou $s(n)$ est la meilleur approximation de $\mathcal{A}$.