Capes externe de mathématique épreuve 2.

I Problème 1.

1. Puisqu'il s'agit du quart du cercle unité du plan (visiblement muni d'un repère orthonormé)

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\pi 1^2$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{\pi}{4}.}$$

2. Exprimons $\mathcal{A}$ comme l'aire sous la courbe représentative d'une fonction.

Montrons : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}t.$

D'après le théorème de Pythagore, $M(x,y)$ appartient au cercle unité si et seulement si

$$x^2 + y^2 = 1$$

Ce qui équivaut encore, pour x et y positifs à

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

Autrement dit le quart de cercle unité représenté est la courbe représentative de la fonction ϕ introduite ci-après.
ϕ est une fonction continue et positive donc $\mathcal{A}$ est l'aire délimitée par les axes des abscisses, des ordonnées et la courbe représentative de ϕ.
Autrement dit

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x.}$$

3. (a) Il es possible d'indiquer :
   - Que ce constat relève de la conjecture, non de la démonstration. L'idée de se rapprocher doit se traduire par une distance qui serait à expliciter.
   - Que ce rapprochement s'arrête peut-être avant que les sommets n'atteignent la courbe ; ce qui signifierai que les sommes des aires des rectangles encadrent $\mathcal{A}$ sans l'atteindre à la limite.

— Qu'il y a plusieurs aspects qui nécessitent de prendre des précautions : à la limite les aires des rectangles sont nulles et le nombre de rectangles, et donc la somme, devient infini.

(b) Nous allons intégrer des encadrements de ϕ.

Les fonctions carrée et racine carrée sont croissantes sur $[0,1]$, donc par composition des fonctions, ϕ est décroissante sur $[0,1]$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $x \in [x_{i-1},x_i]$.
ϕ étant décroissante sur $[0,1]$

$$\phi(x_{i-1}) \geq \phi(x) \geq \phi(x_i)$$

ϕ étant continue sur $[x_{i-1},x_i]$ elle est intégrable sur cet intervalle et donc

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x_{i-1})\ \mathrm{d}x \geq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x_i)\ \mathrm{d}x$$

En sommant les n égalités ainsi obtenues

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x_{i-1})\ \mathrm{d}x \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x)\ \mathrm{d}x \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x_i)\ \mathrm{d}x$$
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\phi(x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x)\ \mathrm{d}x \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\phi(x_i)$$

D'après la relation de Chasles

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(x_{i-1}) \geq \int_{x_0}^{x_n} \phi(x)\ \mathrm{d}x \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)$$

En procédant à un changement d'indice

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(x_j) \geq \int_{0}^{1} \phi(x)\ \mathrm{d}x \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)$$

Or, pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{n}\phi(x_i)$ s'interprète géométriquement comme l'aire du rectangle au dessus de la courbe et $\frac{1}{n}\phi(x_{i-1})$ comme celle du rectangle au dessous de la courbe, donc le précédent encadrement peut s'écrire

$$\check{s}(n) \geq \int_{0}^{1} \phi(x)\ \mathrm{d}x \geq \hat{s}(n)$$

Ainsi

$$\boxed{\hat{s}(n) \leq \mathcal{A} \leq \check{s}(n).}$$

(c) Petit calcul.

Calculons $\hat{s}(n) - \check{s}(n)$.

D'après la question précédente

$$\begin{aligned}
\hat{s}(n) - \check{s}(n) &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi(x_i)\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(x_n - x_0\right) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{s}(n) - \check{s}(n) = \tfrac{1}{n}}$$

(d) Il suffit que $\frac{1}{n} \leq 10^{-3}$.

Montrons qu'il suffit que $\frac{1}{N} \leq 10^{-3}$.

D'après la question 3.(b)

$$\check{s}(n) - \hat{s}(n) \leq \mathcal{A} - \hat{s}(n) \leq 0$$

Donc

$$|\mathcal{A} - \hat{s}(n)| \leq |\check{s}(n) - \hat{s}(n)| = \frac{1}{n}$$

Or

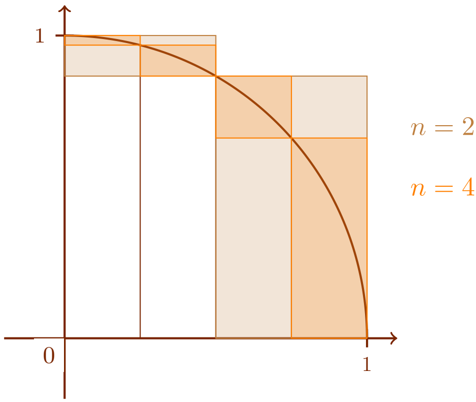
$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \leq 10^{-3} &\Leftrightarrow 10^3 \leq n \\
&\Leftrightarrow n \geq 1\,000
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{si } n = 1\,000 \text{ alors} \\ \forall n \geq N \Rightarrow |\mathcal{A} - \check{s}(n)| \leq 10^{-3}.\end{array}}$$

(e) Pour comparer les expressions nous utilisons les expressions trouvées à la question 3.(b).

Représentons sur une figure.



Comparons $\hat{s}(2)$ et $\hat{s}(4)$.

D'après la question 3.(b)

$$\hat{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi(x_j)$$

donc

$$\begin{aligned}\hat{s}(2) - \hat{s}(4) &= \frac{1}{2}\left[\phi(0) + \phi\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{4}\left[\phi(0) + \phi\left(\frac{1}{4}\right) + \phi\left(\frac{1}{2}\right) + \phi\left(\frac{3}{4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\phi(0) - \phi\left(\frac{1}{4}\right)\right] + \frac{1}{4}\left[\phi\left(\frac{1}{2}\right) - \phi\left(\frac{3}{4}\right)\right]\end{aligned}$$

Et puisque ϕ est décroissante nous en déduisons

$$\hat{s}(2) - \hat{s}(4) \geq 0$$

$$\boxed{\hat{s}(2) \geq \hat{s}(4).}$$

Comparons $\check{s}(2)$ et $\check{s}(4)$.

D'après la question 3.(b)

$$\hat{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)$$

donc

$$\begin{aligned}\check{s}(2) - \check{s}(4) &= \frac{1}{2}\left[\phi\left(\frac{1}{2}\right) + \phi(1)\right] - \frac{1}{4}\left[\phi\left(\frac{1}{4}\right) + \phi\left(\frac{1}{2}\right) + \phi\left(\frac{3}{4}\right) + \phi(1)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\phi\left(\frac{1}{2}\right) - \phi\left(\frac{1}{4}\right)\right] + \frac{1}{4}\left[\phi(1) - \phi\left(\frac{3}{4}\right)\right]\end{aligned}$$

Et puisque ϕ est décroissante nous en déduisons

$$\check{s}(2) - \check{s}(4) \leq 0$$

$$\boxed{\check{s}(2) \leq \check{s}(4).}$$

(f) Nous utilisons toujours les mêmes formules pour étudier la monotonie de $(\hat{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\check{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Montrons que $(\hat{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\hat{s}(2^{n+1}) - \hat{s}(2^n) &= \left[\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} \phi\left(\frac{i}{2^{n+1}}\right)\right] - \left[\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2^n}\left[\sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2}\phi\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) + \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2}\phi\left(\frac{2i}{2^{n+1}}\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^n}\left[\sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2}\phi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{i+\frac{1}{2}}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right)
\end{aligned}$$

Et puisque ϕ est décroissante

$$\hat{s}(2^{n+1}) - \hat{s}(2^n) \leq 0$$

$(\hat{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

Montrons que $(\check{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\check{s}(2^{n+1}) - \check{s}(2^n) &= \left[\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^{n+1}}\phi\left(\frac{i}{2^{n+1}}\right)\right] - \left[\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\phi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2^n}\left[\sum_{i=1}^{2^n}\frac{1}{2}\phi\left(\frac{2i-1}{2^{n+1}}\right) + \sum_{i=1}^{2^n}\frac{1}{2}\phi\left(\frac{2i}{2^{n+1}}\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^n}\phi\left(\frac{2i-1}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^n}\phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^n}\phi\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right)
\end{aligned}$$

Puisque ϕ est décroissante

$$\check{s}(2^{n+1}) - \check{s}(2^n) \geq 0$$

$$\boxed{(\check{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}) \text{ est donc croissante.}}$$

Montrons que $(\hat{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\check{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Nous venons d'établir que $(\hat{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et que $\check{s}(2^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Comme de plus $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, d'après la question 3.(c),

$$\boxed{(\hat{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (\check{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}}$$

(g) Les suites étant adjacentes elles convergent toutes deux vers une même limite qui est donc l'aire $\mathcal{A}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\hat{s}(2^n) = \lim_{n\to+\infty}\check{s}(2^n) = \mathcal{A}.$$

Les sommets des rectangles se rapprochent donc indéfiniment de la courbe (ou en tout cas une suite extraite de sommets).

(h) Écrivons un algorithme de calcul de $\hat{s}(n)$ en python.

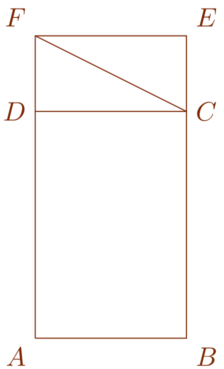
Cet algorithme ne fournit que des valeurs approchées.

```
from math import *
n=input("Valeur de n? ")
n=int(n)
k,s=0,0
while k<n:
        s=s+sqrt(1-(k/n)**2)
        k=k+1
s=s/n
print("s=",s)
```

Écrivons un algorithme de calcul de $\hat{s}(n)$ en pseudo-code.

```
Saisir une valeur pour n
Affecter 0 à k
Affecter 0 à s
tant que k < n faire
    Affecter s + sqrt(1 - (k/n)^2) à s
    Affecter k + 1 à k
fin
Affecter s/n à s
Afficher s
```

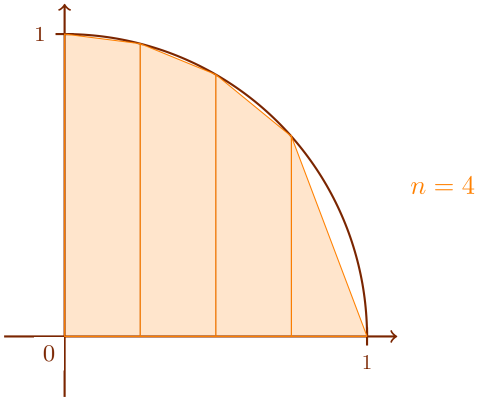
4. (a) Justifions l'appellation *méthode des trapèzes*.



L'aire du trapèze $ABCF$ s'obtient comme la demi-somme des aires des rectangles :

$$\mathcal{A}(ABCF) = \frac{\mathcal{A}(ABCD) + \mathcal{A}(ABEF)}{2}$$

Représentons $s(4)$.



(b) Justifions l'encadrement.

Soit $n \geq 2$.
D'après la question 3.(b) : $\check{s}(n) \leq \hat{s}(n)$.
Donc :

$$\frac{\check{s}(n) + \check{s}(n)}{2} \leq \frac{\check{s}(n) + \hat{s}(n)}{2} \leq \frac{\hat{s}(n) + \hat{s}(n)}{2}$$

Enfin : $\forall n \geq 2,\ \check{s}(n) \leq s(n) \leq \hat{s}(n)$.

(c)