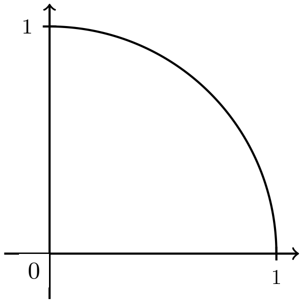
Capes externe de mathématique épreuve 2.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

I Problème 1.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On considère le quart de cercle unité du plan usuel, représenté sur la figure ci-dessous :



1. Quelle est l'aire $\mathcal{A}$ du quart de disque $\mathcal{D}$ délimité par les deux axes de coordonnées et ce quart de cercle ?

   Puisqu'il s'agit du quart du cercle unité du plan (visiblement muni d'un repère orthonormé)

   $$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\pi 1^2$$

   D'où

   $$\boxed{\mathcal{A} = \frac{\pi}{4}.}$$

2. Montrer que cette aire est également la valeur de l'intégrale

   $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exprimons $\mathcal{A}$ comme l'aire sous la courbe représentative d'une fonction.

Montrons : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}t$.

D'après le théorème de Pythagore, $M(x,y)$ appartient au cercle unité si et seulement si

$$x^2 + y^2 = 1$$

Ce qui équivaut encore, pour x et y positifs à

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

Autrement dit le quart de cercle unité représenté est la courbe représentative de la fonction ϕ introduite ci-après.

ϕ est une fonction continue et positive donc $\mathcal{A}$ est l'aire délimitée par les axes des abscisses, des ordonnées et la courbe représentative de ϕ.

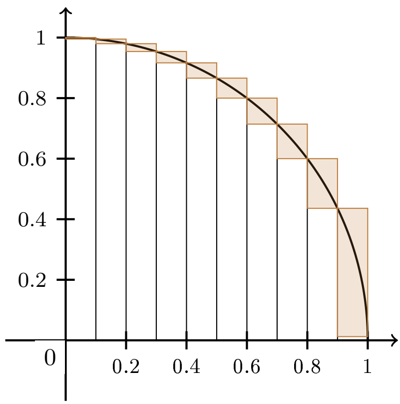
Autrement dit

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x.}$$

Par la suite, on considère la fonction

$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$$

3. On s'intéresse tout d'abord à une évaluation de $\mathcal{A}$ grâce à la *méthode des rectangles.*



On fixe un entier naturel $n \geq 2$. On introduit une subdivision

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

à pas constant de l'intervalle $[0,1]$, c'est-à-dire que :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ x_i = \frac{i}{n}.$$

Pour $i \in [\![0,n[\![$, on considère les points $A_i\ (x_i,\phi(x_i))$ et, pour $i \in [\![0,n-1]\!]$, on construit sur chaque intervalle $[x_i,x_{i+1}]$ le rectangle *au dessous de la courbe* de sommets

$$(x_i,0),\quad (x_{i+1},0),\quad (x_{i+1},\phi(x_{i+1})),\quad (x_i,\phi(x_{i+1}))$$

et le rectangle au dessus de la courbe de sommets

$$(x_i,0),\quad (x_{i+1},0),\quad (x_{i+1},\phi(x_i)),\quad (x_i,\phi(x_i)).$$

On a représenté ces rectangles pour $n = 10$ sur la figure ci-dessus. La différence ensembliste de ces rectangles a été grisée.
On note $\check{s}(n)$ la somme des aires des rectangles au-dessous de la courbe et $\hat{s}(n)$ la somme des aires des rectangles au-dessus de la courbe.

(a) Un élève de terminale scientifique affirme à propos de cette méthode : « Plus le nombre de rectangle augmente, plus les sommets des rectangles se rapprochent de la courbe, donc la somme des aires des rectangles tend vers $\mathcal{A}$ ». Que répondez-vous à cet élève ?

Il est possible d'indiquer :

— Que ce constat relève de la conjecture, non de la démonstration. L'idée de se rapprocher doit se traduire par une distance qui serait à expliciter.

— Que ce rapprochement s'arrête peut-être avant que les sommets n'atteignent la courbe ; ce qui signifierai que les sommes des aires des rectangles encadrent $\mathcal{A}$ sans l'atteindre à la limite.

— Qu'il y a plusieurs aspects qui nécessitent de prendre des précautions : à la limite les aires des rectangles sont nulles et le nombre de rectangles, et donc la somme, devient infini.

(b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\check{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i) \leq \mathcal{A} \leq \hat{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi(x_i).$$

Nous allons intégrer des encadrements de ϕ.

Les fonctions carrée et racine carrée sont croissantes sur $[0,1]$, donc par composition des fonctions, ϕ est décroissante sur $[0,1]$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $x \in [x_{i-1},x_i]$.
ϕ étant décroissante sur $[0,1]$

$$\phi(x_{i-1}) \geq \phi(x) \geq \phi(x_i)$$

ϕ étant continue sur $[x_{i-1},x_i]$ elle est intégrable sur cet intervalle et donc

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x_{i-1})\ \mathrm{d}x \geq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x_i)\ \mathrm{d}x$$

En sommant les n égalités ainsi obtenues

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x_{i-1})\ \mathrm{d}x \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x)\ \mathrm{d}x \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x_i)\ \mathrm{d}x$$
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\phi(x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x)\ \mathrm{d}x \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\phi(x_i)$$

D'après la relation de Chasles

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(x_{i-1}) \geq \int_{x_0}^{x_n} \phi(x)\ \mathrm{d}x \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)$$

En procédant à un changement d'indice

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(x_j) \geq \int_{0}^{1} \phi(x)\ \mathrm{d}x \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)$$

Or, pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{n}\phi(x_i)$ s'interprète géométriquement comme l'aire du rectangle au dessous de la courbe et $\frac{1}{n}\phi(x_{i-1})$ comme celle du rectangle au dessus de la courbe, donc le précédent encadrement peut s'écrire

$$\hat{s}(n) \geq \int_{0}^{1} \phi(x)\ \mathrm{d}x \geq \check{s}(n)$$

Ainsi

$$\boxed{\check{s}(n) \leq \mathcal{A} \leq \hat{s}(n).}$$

(c) Montrer que la somme des aires des rectangles grisés sur la figure précédente est
$$\hat{s}(n) - \check{s}(n) = \frac{1}{n}.$$

Petit calcul.

Calculons $\hat{s}(n) - \check{s}(n)$.

D'après la question précédente

$$\begin{aligned}\hat{s}(n) - \check{s}(n) &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi(x_i)\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(x_n - x_0\right)\\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{s}(n) - \check{s}(n) = \frac{1}{n}}$$

(d) Déterminer un entier N tel que, pour $n \geq N$, on ait $|\mathcal{A} - \hat{s}(n)| \leq 10^{-3}$.

Il suffit que $\frac{1}{n} \leq 10^{-3}$.

Montrons qu'il suffit que $\frac{1}{N} \leq 10^{-3}$.

D'après la question 3.(b)
$$\check{s}(n) - \hat{s}(n) \leq \mathcal{A} - \hat{s}(n) \leq 0$$

Donc
$$|\mathcal{A} - \hat{s}(n)| \leq |\check{s}(n) - \hat{s}(n)| = \frac{1}{n}$$

Or
$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \leq 10^{-3} &\Leftrightarrow 10^3 \leq n\\ &\Leftrightarrow n \geq 1\,000\end{aligned}$$

donc

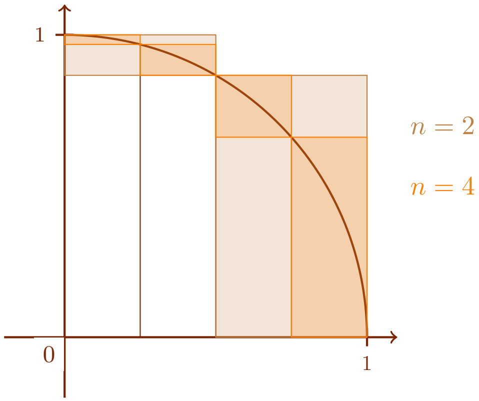
si $N = 1\,000$ alors

$\forall n \geq N \Rightarrow |\mathcal{A} - \check{s}(n)| \leq 10^{-3}$.

(e) Représenter sur une même figure $\hat{s}(2)$, $\check{s}(2)$, $\hat{s}(4)$ et $\check{s}(4)$. Comparer $\hat{s}(2)$ et $\hat{s}(4)$, puis $\check{s}(2)$ et $\check{s}(4)$.

Pour comparer les expressions nous utilisons les expressions trouvées à la question 3.(b).

Représentons sur une figure.



Comparons $\hat{s}(2)$ et $\hat{s}(4)$.

D'après la question 3.(b)

$$\hat{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(x_j)$$

donc

$$\begin{aligned}\hat{s}(2) - \hat{s}(4) &= \frac{1}{2}\left[\phi(0) + \phi\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{4}\left[\phi(0) + \phi\left(\frac{1}{4}\right) + \phi\left(\frac{1}{2}\right) + \phi\left(\frac{3}{4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\phi(0) - \phi\left(\frac{1}{4}\right)\right] + \frac{1}{4}\left[\phi\left(\frac{1}{2}\right) - \phi\left(\frac{3}{4}\right)\right]\end{aligned}$$

Et puisque ϕ est décroissante nous en déduisons

$$\hat{s}(2) - \hat{s}(4) \geq 0$$

$$\boxed{\hat{s}(2) \geq \hat{s}(4).}$$

Comparons $\check{s}(2)$ et $\check{s}(4)$.

D'après la question 3.(b)

$$\hat{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)$$

donc

$$\begin{aligned}\check{s}(2) - \check{s}(4) &= \frac{1}{2}\left[\phi\left(\frac{1}{2}\right) + \phi(1)\right] - \frac{1}{4}\left[\phi\left(\frac{1}{4}\right) + \phi\left(\frac{1}{2}\right) + \phi\left(\frac{3}{4}\right) + \phi(1)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\phi\left(\frac{1}{2}\right) - \phi\left(\frac{1}{4}\right)\right] + \frac{1}{4}\left[\phi\left(1\right) - \phi\left(\frac{3}{4}\right)\right]\end{aligned}$$

Et puisque ϕ est décroissante nous en déduisons

$$\check{s}(2) - \check{s}(4) \leq 0$$

$$\boxed{\check{s}(2) \leq \check{s}(4).}$$

(f) Montrer que les suites de terme général $\hat{s}(2^n)$ et $\check{s}(2^n)$ sont adjacentes.

Nous utilisons toujours les mêmes formules pour étudier la monotonie de $(\hat{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\check{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Montrons que $(\hat{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$
\begin{aligned}
\hat{s}(2^{n+1}) - \hat{s}(2^n) &= \left[\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} \phi\left(\frac{i}{2^{n+1}}\right)\right] - \left[\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2^n}\left[\sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2}\phi\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) + \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2}\phi\left(\frac{2i}{2^{n+1}}\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^n}\left[\sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2}\phi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^n-1} \phi\left(\frac{i+\frac{1}{2}}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right)
\end{aligned}
$$

Et puisque ϕ est décroissante

$$\hat{s}(2^{n+1}) - \hat{s}(2^n) \leq 0$$

$$\boxed{(\hat{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est donc décroissante.}}$$

Montrons que $(\check{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$
\begin{aligned}
\check{s}(2^{n+1}) - \check{s}(2^n) &= \left[\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^{n+1}}\phi\left(\frac{i}{2^{n+1}}\right)\right] - \left[\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\phi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2^n}\left[\sum_{i=1}^{2^n}\frac{1}{2}\phi\left(\frac{2i-1}{2^{n+1}}\right) + \sum_{i=1}^{2^n}\frac{1}{2}\phi\left(\frac{2i}{2^{n+1}}\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^n}\phi\left(\frac{2i-1}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^n}\phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^n}\phi\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right)
\end{aligned}
$$

Puisque ϕ est décroissante

$$\check{s}(2^{n+1}) - \check{s}(2^n) \geq 0$$

$(\check{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

Montrons que $(\hat{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\check{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Nous venons d'établir que $(\hat{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et que $\check{s}(2^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Comme de plus $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, d'après la question 3.(c),

$(\hat{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\check{s}(2^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

(g) En quoi ce résultat peut-il vous aider à répondre à l'élève de la question (a) ?

Les suites étant adjacentes elles convergent toutes deux vers une même limite qui est donc l'aire $\mathcal{A}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\hat{s}(2^n) = \lim_{n\to+\infty}\check{s}(2^n) = \mathcal{A}.$$

Les sommets des rectangles se rapprochent donc indéfiniment de la courbe (ou en tout cas une suite extraite de sommets).

(h) Écrire un algorithme de calcul de $\hat{s}(n)$.

Écrivons un algorithme de calcul de $\hat{s}(n)$ en python.

Cet algorithme ne fournit que des valeurs approchées.

```python
from math import *
n=input("Valeur de n? ")
n=int(n)
k,s=0,0
while k<n:
        s=s+sqrt(1-(k/n)**2)
        k=k+1
s=s/n
print("s=",s)
```

Écrivons un algorithme de calcul de $\hat{s}(n)$ en pseudo-code.

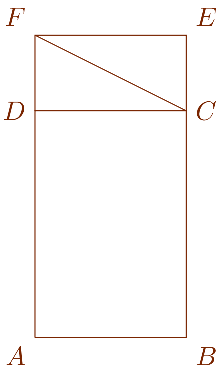
Saisir une valeur pour n
Affecter 0 à k
Affecter 0 à s
tant que $k < n$ **faire**
    Affecter $s + \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ à s
    Affecter $k + 1$ à k
fin
Affecter $\frac{s}{n}$ à s
Afficher s

4. On s'intéresse ici à une évaluation de $\mathcal{A}$ grâce à la méthode dite *méthode des trapèzes*.
   Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note

$$s(n) = \frac{\hat{s}(n) + \check{s}(n)}{2}.$$

(a) Justifier le nom de *méthode des trapèzes*. On représentera $s(4)$ sur une figure.

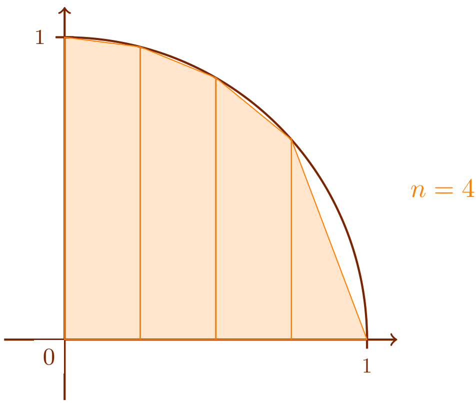
Justifions l'appellation *méthode des trapèzes*.



L'aire du trapèze $ABCF$ s'obtient comme la demi-somme des aires des rectangles :

$$\mathcal{A}(ABCF) = \frac{\mathcal{A}(ABCD) + \mathcal{A}(ABEF)}{2}$$

Représentons $s(4)$.



(b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\check{s}(n) \leq s(n) \leq \hat{s}(n)$.

Justifions l'encadrement.

Soit $n \geq 2$.
D'après la question 3.(b) : $\check{s}(n) \leq \hat{s}(n)$.
Donc :

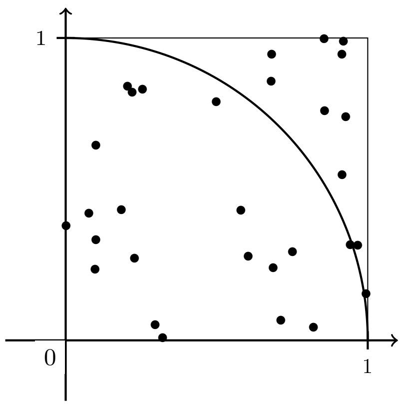
$$\frac{\check{s}(n) + \check{s}(n)}{2} \leq \frac{\check{s}(n) + \hat{s}(n)}{2} \leq \frac{\hat{s}(n) + \hat{s}(n)}{2}$$

Enfin : $\forall n \geq 2$, $\check{s}(n) \leq s(n) \leq \hat{s}(n)$.

(c) Indiquer laquelle des trois valeurs $\hat{s}(n)$, $\check{s}(n)$ ou $s(n)$ est la meilleur approximation de $\mathcal{A}$.

Par concavité de ϕ $s(n) \leq \mathcal{A}$ et comme $\check{s}(n) \leq s(n) \leq \hat{s}(n)$ et $\check{s}(n) \leq \mathcal{A} \leq \hat{s}(n)$, on en déduit $\check{s}(n) \leq s(n) \leq \mathcal{A}$.
Comparons $|\mathcal{A} - s(n)|$ et $|\mathcal{A} - \hat{s}(n)|$.

5. On s'intéresse maintenant à une autre méthode, appelée *méthode de Monté-Carlo*. Il s'agit de tirer aléatoirement un point du carré unité de façon uniforme et de calculer la fréquence des points qui sont dans le quart de disque $\mathcal{D}$.



On admet que la probabilité qu'un point tiré de cette manière soit dans le quart de disque est égale à $\mathcal{A}$.

(a) Soit $M(x,y)$ un point du carré $[0,1]^2$. Montrer que ce point est dans le quart de disque dont on cherche à mesurer l'aire si, et seulement si, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Déterminons une inéquation cartésienne du disque.

Le repère étant orthonormé

$$OM = \sqrt{(x_M - 0)^2 + (y_M - 0)^2}$$

ce qui équivaut, OM étant positif, à

$$OM^2 = x^2 + y^2$$

Donc

$M(x,y)$ appartient au quart de disque de centre O et de rayon 1 si et seulement si

$$\begin{cases} (x,y) \in [0,1]^2 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

(b) On dispose de la fonction (sans argument) **alea**, qui renvoie à chaque appel un nombre réel tiré au hasard uniformément dans l'intervalle $[0,1]$. Écrire un algorithme qui simule un tirage aléatoire de N points du carré unité et calcule la fréquence f des points figurant dans le quart de disque $\mathcal{D}$.

Écrivons un algorithme de calcul de la fréquence d'apparition des points dans le quart de disque.

Voici un tel algorithme en Python.

```python
import random
n=input("Nombre de points =?")
n=int(n)
k,c=1,0
while k<=n:
    if random.random()**2+random.random()**2<=1:
        c=c+1
    k=k+1
print("Frequence= ",c/n)
```

Écrivons un algorithme de calcul de la fréquence d'apparition des points dans le quart de disque.

Saisir une valeur pour n
Affecter 1 à k
Affecter 0 à c
tant que $k \leq n$ **faire**
    si $\textbf{alea}^2 + \textbf{alea}^2 \leq 1$ **alors**
        Affecter $c+1$ à c
    fin
    Affecter $k+1$ à k
fin
Afficher $\frac{c}{n}$

(c) f étant la fréquence obtenue lors d'un tirage aléatoire de N points du carré unité, déterminer un intervalle de confiance de $\mathcal{A}$ au niveau de confiance 95 %.

Déterminons un intervalle de confiance avec un niveau de risque de 5 %.

Choisir un point du carré s'apparente à une épreuve de Bernoulli. Elle est répétée N fois à l'identique et de façon indépendante ce qui constitue un schéma de Bernoulli de paramètres N et $\mathcal{A}$.
Pour $N \geq 25$ et $0{,}2 \leq \mathcal{A} \leq 0{,}8$, la fréquence des points dans le quart de disque étant f, nous en déduisons l'intervalle de fluctuation des fréquences au niveau de 95 % :

$$\boxed{I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{N}} ; f + \frac{1}{\sqrt{N}}\right]}$$

(d) En déduire le nombre N de tirages à effectuer pour obtenir, au niveau de confiance 95 %, une estimation de $\mathcal{A}$ avec un précision égale à 10^{-3}.

Déterminons N.

On souhaite que le diamètre de l'intervalle de confiance soit inférieur à 10^{-3}, ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} f + \frac{1}{\sqrt{N}} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}}\right) &\leq 10^{-3} \\ \frac{2}{\sqrt{N}} &\leq 10^{-3} \\ 2 \times 10^{3} &\leq \sqrt{N} \end{aligned}$$

La fonction carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$4 \times 10^{6} \leq N$$

$$\boxed{\text{Il faut effectuer quatre millions de tirage pour obtenir une estimation de } \mathcal{A} \text{ avec une précision de } 10^{-3}.}$$

(e) Comparez ce résultat avec celui de la question 3.(d).

D'après la question précédente, la méthode de Monte-Carlo semble converger beaucoup plus lentement que la méthode des rectangles.

II Problème 2.

Notations.

$\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathcal{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m,n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leq k \leq n$.

Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients réels.

On note I_n la matrice identité d'ordre n.

Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.

Définitions.

Soit $\left(X^{(k)}\right)_{k\leq 0}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $X = (x_1, \ldots ,x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Pour tout entier naturel k, on pose $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots ,x_n^{(k)})$. On dit que la suite $\left(X^{(k)}\right)_{k\geq 0}$ converge vers X si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la suite $\left(x_i^{(k)}\right)_{k\geq 0}$ converge vers x_i.

Soit $\left(A^{(k)}\right)_{k\geq 0}$ une suite de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier naturel k, on pose $A^{(k)} = \left(a_{i,j}^{(k)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. On dit que la suite $\left(A^{(k)}\right)_{k\geq 0}$ converge vers A si pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, la suite $\left(a_{i,j}^{(k)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ converge vers $a_{i,j}$.

Soit G un graphe orienté fini et soient i et j deux sommets de ce graphe. On dit que j est un sommet voisin de i s'il existe une arête orientée de G reliant i à j.

Partie A : marche aléatoire sur un graphe.

On considère un graphe orienté fini dont les sommets sont numérotés de 1 à n. Un point se déplace aléatoirement d'un sommet à un autre de ce graphe au cours d'étapes, le nombre d'étapes pouvant tendre vers l'infini. À chaque étape, le point se déplace du sommet où il se trouve vers l'un des sommets voisins de façon équiprobable. Ceci entraîne notamment que la probabilité de passer du sommet i au sommet j ne dépend pas du rang de l'étape.

Pour $1 \leq i,j \leq n$, on note $a_{i,j}$ la probabilité que le point passe du sommet i au sommet j ; en particulier s'il n'y a pas d'arête reliant i à j, $a_{ij} = 0$. La matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est notée A. Cette matrice s'appelle la *matrice de transition* du graphe.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne $\left(p_1^{(k)},p_2^{(k)}, \ldots ,p_{n-1}^{(k)},p_n^{(k)}\right)$, où pour $1 \leq i \leq n$, $p_i^{(k)}$ est la probabilité que le point soit sur le sommet i à l'étape de rang k.

1. **Résultats généraux.**

   (a) Justifier que, pour tout entier naturel k, $p_1^{(k)} + \cdots + p_n^{(k)} = 1$.

   À l'étape k les événements « le point est sur le sommet i » pour $i \in [\![1,n]\!]$ constituent un système complet d'événements.
   Le point se déplaçant sur un graphe à n sommets, à l'étape k il est sur l'un des sommets. Il s'agit d'un événement certain, autrement dit

   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ p_1^{(k)} + \cdots + p_n^{(k)} = 1}$$

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel k, $P^{(k+1)} = P^{(k)}A$.

   Montrons : $\forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k+1)} = P^{(k)}A$.

   Soit $k \in \mathbb{N}$.
   Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]$.
   Notons X_k la variable aléatoire dont la valeur est le numéro du sommet à l'étape de rang k.
   La famille $(X_k = h)_{h\in[\![1,n]\!]}$ constitue un système complet d'événements au rang k donc, d'après la formule des probabilités totales et puisque les probabilités ne dépendent pas du rang de l'étape

   $$P(X_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^{n} P\left(X_{k+1} = j | X_k = i\right) P\left(X_k = i\right)$$

   Or la probabilité que le point arrive au sommet j sachant qu'il vient du point i à l'étape de rang k est a_{ij} :

   $$P\left(X_{k+1} = j | X_k = i\right) = a_{ij}$$

   et avec la notation de l'énoncé :

   $$P\left(X_k = i\right) = p_i^{(k)}$$

   et

   $$P\left(X_{k+1} = j\right) = p_j^{(k+1)}$$

   donc

   $$p_j^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i^{(k)}$$

   Nous reconnaissons le produit matriciel $P^{(k+1)} = P^{(k)}A$.

Nous avons démontré que : $\forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k+1)} = P^{(k)}A$.

(c) En déduire, pour tout entier naturel k, une expression de $P^{(k)}$ en fonction de A, k et $P^{(0)}$.

Par récurrence immédiate.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la proposition $P^{(n)} = P^{(0)}A^n$ est vraie.

- $P^{(0)}A^0 = P^{(0)}I_n = P^{(0)}$. Donc la proposition est vraie au rang $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$P^{(n)} = P^{(0)}A^n$$

et démontrons qu'alors on a bien

$$P^{(n+1)} = P^{(0)}A^{n+1}$$

D'après notre hypothèse de récurrence :

$$P^{(n)} = P^{(0)}A^n \Rightarrow P^{(n)}A = P^{(0)}A^nA$$

Par construction de la suite $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} P^{(n)}A = P^{(0)}A^nA &\Rightarrow P^{(n+1)} = P^{(0)}A^nA \\ &\Rightarrow P^{(n+1)} = P^{(0)}A^{n+1} \end{aligned}$$

- Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)} = P^{(0)}A^n$.

(d) On suppose que la suite de vecteurs $\left(P^{(k)}\right)_{k\geq 0}$ converge vers un vecteur $P = (p_1, \ldots, p_n)$. Montrer que $PA = P$ et que $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

En utilisant la continuité d'applications linéaires.

Démontrons : $P^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\to} P \Rightarrow \begin{cases} PA = P \\ p_1 + \cdots + p_n = 1 \end{cases}$

Supposons donc que $P^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\to} P$.

Les applications

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MA \end{array} \right.$$

et

$$\psi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (m_1, \dots, m_n) & \mapsto & m_1 + \cdots + m_n \end{array} \right.$$

sont linéaires entre espaces vectoriels de dimensions finies donc son continues.

Nous déduisons de la caractérisation séquentielle de la continuité qu'en particulier :

$$\psi\left(P^{(k)}\right) \underset{k \to +\infty}{\to} \psi(P)$$

mais aussi en passant à la limite dans les égalités

$$P^{(k+1)} = P^{(k)}A$$

que

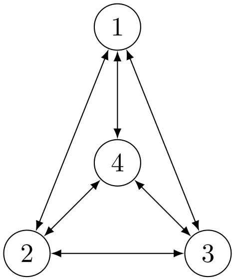
$$P = PA$$

Nous avons établi que si $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers P alors

$$PA = P \quad \text{et} \quad p_1 + \cdots + p_n = 1$$

2. **Marche aléatoire sur un tétraèdre.**

Dans cette question, on suppose que G est le graphe ci-dessous :



On remarque que, lorsque le point est sur l'un des sommets du graphe, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des trois autres sommets du graphe. On suppose qu'au départ, le point est sur le sommet 1, de sorte que :

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Exprimez la matrice de transition A en fonction de U.

Déterminons A.

Il n'y a pas de boucles sur le graphe donc :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} = 0.$$

De plus le graphe est complet puisqu'il est simple et que deux quelconques sommets sont adjacents. Le point ayant la même probabilité de se rendre sur chacun des sommets du graphe nous en déduisons

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = \frac{1}{3}.$$

D'où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$\boxed{A = \frac{1}{3}U.}$$

(b) Calculer U^2 et U^3.

$$\boxed{U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } U^3 \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}}$$

(c) Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ e $(\beta_k)_{k\geq 0}$ telles que pour tout entier naturel k :

$$U^k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Montrer de plus, que pour tout entier naturel k,

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = 3\beta_k \\ \beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k \end{cases}$$

Notons $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = 3\beta_k \\ \beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k \end{cases}$$

Les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et$(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

Notons, pour $\in \mathbb{N}$, $P(n)$ la proposition

$$U^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n & \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Démontrons par récurrence sur n que $P(n)$ est vraie.

*

$$U^0 = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \beta_0 & \beta_0 \\ \beta_0 & \alpha_0 & \beta_0 & \beta_0 \\ \beta_0 & \beta_0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ \beta_0 & \beta_0 & \beta_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $P(n)$ est vraie.
Démontrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$U^{n+1} = U^n U$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
U^{n+1} &= \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n & \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot U \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n & \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\beta_n & \alpha_n + 2\beta_n & \alpha_n + 2\beta_n & \alpha_n + 2\beta_n \\ \alpha_n + 2\beta_n & 3\beta_n & \alpha_n + 2\beta_n & \alpha_n + 2\beta_n \\ \alpha_n + 2\beta_n & \alpha_n + 2\beta_n & 3\beta_n & \alpha_n + 2\beta_n \\ \alpha_n + 2\beta_n & \alpha_n + 2\beta_n & \alpha_n + 2\beta_n & 3\beta_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par construction des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et$(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$U^{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & \beta_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \beta_{n+1} & \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \beta_{n+1} & \beta_{n+1} & \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \beta_{n+1} & \beta_{n+1} & \beta_{n+1} & \alpha_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que, si $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 0$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n & \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

(d) En déduire que, pour tout entier naturel k, $\beta_{k+2} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k$.

Démontrons : $\forall k \in \mathbb{N},\ \beta_{k+2} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente

$$\beta_{k+2} = \alpha_{k+1} + 2\beta_{k+1}$$

et

$$\alpha_{k+1} = 3\beta_k$$

D'où par substitution

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \beta_{k+2} = 3\beta_k + 2\beta_{k+1}}$$

(e) En déduire que, pour tout entier naturel k, $\beta_k = \dfrac{3^k - (-1)^k}{4}$ et $\alpha_k = \dfrac{3^k + 3(-1)^k}{4}$.

Le plus simple ici serait sans doute de vérifier que la solution proposée par l'énoncé convient bien.

Déterminons un expression explicite de β_k.

* D'après la question précédente $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux à coefficients constants définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \beta_{k+2} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k.$$

L'ensemble, E, des suites réelles vérifiant cette relation de récurrence est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux.
Recherchons-en une base formée de suites géométriques par analyse-synthèse.

Soit $q \in \mathbb{R}^*$.
Nous avons donc :

$$q^{k+2} = 2q^{k+1} + 3q^k$$

Puisque $q \neq 0$ ceci équivaut successivement à

$$q^2 = 2q + 3$$
$$q^2 - 2q - 3 = 0$$

Or le discriminant associé à ce trinôme est $\Delta = 16$ donc les valeurs possibles pour r sont

$$r_1 = 3 \text{ et } r_2 = -1$$

Les suites $(3^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left((-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes et forment donc une base de E.

* Nous en déduisons qu'il existe a et b tels que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \beta_k = a3^k + b(-1)^k.$$

Or $\beta_0 = 0$ et $\beta_1 = 1$ donc, nécessairement, $a = -b = \frac{1}{4}$ et enfin

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \beta_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4}.$$

* De

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha_{k+1} = 3\beta_k$$

nous déduisons

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_k = \frac{3^{k+1} - 3(-1)^k}{4}$$

De plus $\alpha_0 = 1$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha_k = \frac{3^{k+1} - 3(-1)^k}{4}$$

Nous vérifions aisément que les suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi construite conviennent bien au problème et donc

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } k,\ \beta_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4} \text{ et } \alpha_k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4}.}$$

(f) En déduire pour tout entier naturel k une expression de $P^{(k)}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Nous avions établi que

$$P^{(k)} = P^{(0)} A^k$$

et pour le tétraèdre

$$A = \frac{1}{3}U,$$

donc en tenant compte des expressions de U précédemment trouvées

$$P^{(k)} = \frac{1}{3^k} \cdot \frac{3^k-(-1)^k}{4} P^{(0)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3^k-(-1)^k}{3^k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalement

quelque soit $k \in \mathbb{N}$

$$P^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^k-(-1)^k}{3^k} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(g) Montrer que la suite de vecteurs $\left(P^{(k)}\right)_{k\geq 0}$ converge et déterminez la limite de $P^{(k)}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

Établissons la convergence de $\left(P^{(k)}\right)_{k\geq 0}$.

Pour établir la convergence, d'après l'énoncé, il faut et il suffit que nous établissions la convergence de toutes les suites de coefficient de $\left(P^{(k)}\right)_{k\geq 0}$.
Comme

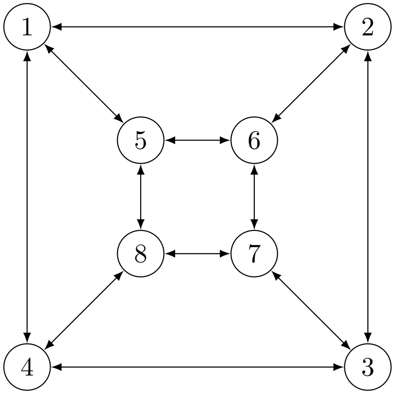
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3^k-(-1)^k}{3^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

l'expression trouvée à la question précédente permet de conclure

$$\left(P^{(k)}\right)_{k\geq 0} \text{ converge vers } \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

3. **Marche aléatoire sur une pyramide tronquée à base carrée.**

Dans cette question, on suppose que G est le graphe ci-dessous :



On rappelle que, lorsque le point est sur l'un des sommets du graphe, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des sommets a qui il est relié. On suppose qu'au départ, le point est sur le sommet 1, de sorte que :

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $X = \{1,3,6,8\}$ et $Y = \{2,4,5,7\}$.

(a) Donner la matrice de transition A de ce graphe et calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A.$$