Capes externe de mathématique épreuve 2.

I Problème 1.

Partie A : mise en œuvre de la méthode d'Euler.

1. Clairement
$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ t_k = k\frac{a}{n} + a$$

2. Puisque
$$\forall i \in [\![0,n-1]\!],\ t_i \neq t_{i+1}$$
quelque soit $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\mathcal{D}_k$ admet une équation réduite.
Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$.

   Déterminons l'équation réduite de $\mathcal{D}_k$.

   Par construction le coefficient directeur est $F(y_k)$.
$\mathcal{D}_k$ passe par le point $A_k(t_k,y_k)$ donc en notant b l'ordonnée à l'origine
$$y_k = F(y_k)t_k + b$$
D'où $b = y_k - F(y_k)t_k$.
Enfin
$$\boxed{\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \mathcal{D}_k : y = F(y_k)x + y_k - F(y_k)t_k}$$

3. Démontrons l'égalité proposée.

   Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$.
$$\begin{cases} A_{k+1} \in \mathcal{D}_k \\ A_{k+1}(t_{k+1},y_{k+1}) \\ \mathcal{D}_k :\ y = F(y_k)x + y_k - F(y_k)t_k \end{cases} \Rightarrow y_{k+1} = F(y_k)(t_{k+1} - t_k) + y_k$$
Or $t_{k+1} - t_k = \frac{a}{n}$ par construction donc
$$y_{k+1} = F(y_k)\frac{a}{n} + y_k$$
Dans le cadre de l'exercice $F(x) = -0{,}04(x-22)$ et $a = 3$ donc
$$y_{k+1} = -0{,}04(y_k - 22)\frac{3}{n} + y_k$$

Finalement

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ y_{k+1} = \left(1 - \frac{0{,}12}{n}\right) y_k + \frac{2{,}64}{n}}$$

4. (a) D'après la question précédente

$$= (1 - 0{,}04 * 3/\$\mathtt{B}\$3) * \mathtt{B6} + 0{,}04 * \$\mathtt{B}\$1 * 3/\$\mathtt{B}\$3$$

   (b) Déterminons la température du café après mélange de Aline.

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{V_1T_1 + V_2T_2}{V_1 + V_2} \\ &= \frac{15 \times 48 + 3 \times 22}{15 + 3} \\ &= \frac{131}{3} \end{aligned}$$

   L'élève devra entrer $= 131/3$ en `B2`.

5. (a)

```
Entrée
    Saisir α, n
Traitement
    Pour k allant de 0 à n − 1 faire
        | Affecter −0,04(α − 22) ∗ 3/n + α à α
    Fin Pour
Sortie
    Afficher α
```

   (b) Pour Aline, avec $\alpha = 131/3$ nous obtenons une température finale de $T(3) \approx 41{,}14$ °C.

   Pour Bernard $T(3) = 44{,}9736$ °C. Donc après mélange la température sera d'approximativement $41{,}14$ °C.

Partie B : résolution exacte.

1. Résolvons le problème de Cauchy.

   L'équation $(E_1)\quad y' = -0{,}04(y-22)$ est linéaire du premier ordre à coefficient constant, les solutions de l'équation homogène associée forment l'ensemble

$\left\{t \mapsto \lambda e^{-0,04t} | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ et la fonction constante égale à 22 est une solution particulière de E_1.
L'ensemble des solutions de E_1 est formé des fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-0,04t} + 22$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y(0) = \alpha &\Leftrightarrow \lambda e^{-0,04\times 0} + 22 = \alpha \\ &\Leftrightarrow \lambda = \alpha - 22 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\text{L'unique solution au problème de Cauchy proposé est } \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\alpha - 22)e^{-0,04t} + 22 \end{array} \right. .}$$

2. Si $\alpha = 48$ alors $T(3) = (48-22)e^{-0,04\times 3} + 22 = 26e^{-0,12} + 22$. Puis après mélange $T_f = \frac{15\times\left(26e^{-0,12}+22\right)+3\times 22}{15+3} = \frac{65}{3}e^{-0,12} + 22$.
Si $\alpha = \frac{131}{3}$ (mélange initial) alors $T(3) = \frac{65}{3}e^{-0,12} + 22$.

$$\boxed{\text{Dans les deux cas la température est la même.}}$$

Partie C : étude de la convergence de la méthode d'Euler.

1. (a) D'après une question précédente $y_{k+1} = \left(1 - \frac{0,12}{n}\right) y_k + \frac{2,64}{n}$.
Donc par identification $a = 1 - \frac{0,12}{n}$ et $b = \frac{2,64}{n}$.

   (b) Il s'agit d'une équation linéaire du premier degré : $l = \frac{b}{1-a} = 22$.

   (c) Exprimons y_n en fonction de n.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{0,12}{n}\right) y_k + \frac{2,64}{n} &= \left(1 - \frac{0,12}{n}\right) y_k - 22\left(1 - \frac{0,12}{n}\right) \\ &\quad + 22\left(1 - \frac{0,12}{n}\right) + \frac{2,64}{n} \\ &= \left(1 - \frac{0,12}{n}\right)(y_k - 22) + 22 \end{aligned}$$

Donc

$$y_{k+1} - 22 = \left(1 - \frac{0{,}12}{n}\right)(y_k - 22)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} (y_k)_{0\leq k\leq n} \text{ est donc géométrique et} \\ y_n = \left(1 - \dfrac{0{,}12}{n}\right)^n (\alpha - 22) + 22 \end{array}}$$

2. Déterminons l'éventuelle limite de $T_n(3)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$$T_n(3) = y_n = \left(1 - \frac{0{,}12}{n}\right)^n (\alpha - 22) + 22$$

Quelque soit x réel,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x$$

Démontrons le. Clairement

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [\ n > N\ ] \Rightarrow \left|\frac{x}{n}\right| < 1$$

Soit $n > N$ un entier naturel.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \exp \circ \ln\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right] \\ &= \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right] \\ &= \exp\left[x \frac{n}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right] \\ &= \exp\left[x \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right] \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

nous en déduisons

$$\exp\left[x \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(x)$$

Pour conclure

$$T_n(3) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (\alpha-22)\mathrm{e}^{-0{,}12}+22$$

Nous retrouvons bien le résultat obtenu à la question **B**.1.

3. Recherchons l'équivalent.

$$\begin{aligned}
T(3)-T_n(3) &= (\alpha-22)\mathrm{e}^{-0{,}12}+22-\left[\left(1-\frac{0{,}12}{n}\right)^n(\alpha-22)+22\right]\\
&= (\alpha-22)\left[\mathrm{e}^{-0{,}12}-\exp\left(n\ln\left(1-\frac{0{,}12}{n}\right)\right)\right]\\
&= (\alpha-22)\mathrm{e}^{-0{,}12}\left[1-\exp\left(0{,}12+n\ln\left(1-\frac{0{,}12}{n}\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

Or

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)$$

donc

$$n\ln\left(1-\frac{0{,}12}{n}\right)=-0{,}12-\frac{0{,}12^2}{2}\cdot\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où

$$\exp\left[0{,}12+n\ln\left(1-\frac{0{,}12}{n}\right)\right]=\exp\left[-\frac{0{,}12^2}{2}\cdot\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

En utilisant le développement limité d'exponentielle en 0.

$$\begin{aligned}
\exp\left[0{,}12+n\ln\left(1-\frac{0{,}12}{n}\right)\right] &= 1+\left[-\frac{0{,}12^2}{2}\cdot\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&= 1-\frac{0{,}12^2}{2}\cdot\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Enfin

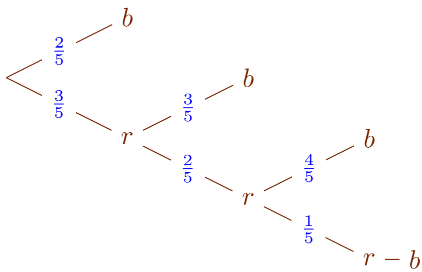
$$\begin{aligned}
T(3)-T_n(3) &= (\alpha-22)\mathrm{e}^{-0{,}12}\left[-\frac{0{,}12^2}{2}\cdot\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&= -\frac{1}{2}(\alpha-22)\mathrm{e}^{-0{,}12}\cdot0{,}12^2\cdot\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{|T(3) - T_n(3)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\alpha - 22)\mathrm{e}^{-0{,}12}\cdot 0{,}12^2}{2}\cdot\frac{1}{n}.}$$

II Problème 2.

Partie A : un cas particulier.



1. (a)

(b) i. D'après l'arbre

$$\boxed{X \in [\![1,4]\!].}$$

ii. Déterminons la loi de probabilité de X.

Les tirages étant indépendants les uns des autres :

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$	$\frac{4\times3\times2}{5^3}$	$\frac{3\times2}{5^3}$

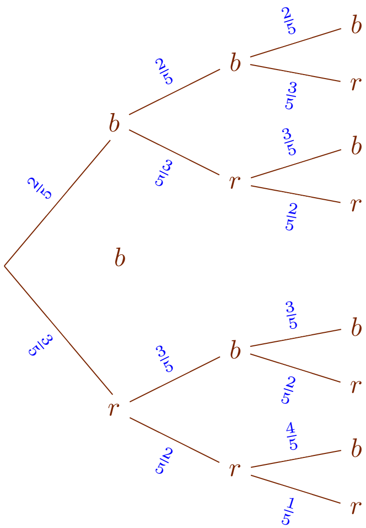
Calculons $E(X)$.

$$\begin{aligned}
E(x) &= \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i)\\
&= \frac{2}{5}\times 1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times 2 + \frac{4\times 3\times 2}{5^3}\times 3 + \frac{3\times 2}{5^3}\times 4\\
&= \frac{236}{125}\\
&= 1{,}888
\end{aligned}$$

Donc une valeur approchée à 10^{-2} près par excès est

$$E(X) \approx 1{,}89$$

Si la première expérience est indéfiniment recommencée, en moyenne il faut 1,89 tirages avant d'obtenir une boule blanche.



2. (a)

 (b) i. $Y \in [\![0,3]\!]$

 ii. Déterminons la loi de probabilité de Y.

 Par exemple

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5} \\ &= \frac{54}{125} \end{aligned}$$

 Donc :

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{6}{125}$

 Calculons $E(X)$.

$E(X) = \frac{183}{125} = 1{,}464.$

Si les trois tirages sont indéfiniment recommencés ont peut espérer en moyenne 1,464 boules rouges parmi les trois tirées.

3. (a) Cet algorithme simule le protocole de tirage décrit dans l'énoncé.

(b)

```
Entrer(b,r)
d ← alea(1,..,b + r)
N ← 0
Tant que (N < 3)
    Si (d > b) Alors
        résultat ← rouge
        b ← b + 1
        r ← r − 1
        X ← X + 1
    Sinon
        résultat ← blanche
    Fin Si
    N ← N + 1
Fin Tant que
Retourner X
```

Partie B : généralisation.

1. (a) Puisqu'on retire une boule rouge à chaque fois qu'une boule rouge est tirée nous pouvons tirer au maximum r boules rouges d'affilée.
Donc $X \in [\![1,r+1]\!]$

$$E = [\![1,r+1]\!]$$

(b) Pour $i \in E$, A_i indique tirer une boule rouge et $\overline{A_i}$ tirer une boule blanche. Si $(X = k)$ cela signifie que la k-ième boule tirée est blanche et que les éventuelles précédentes sont toutes rouges.

$$(X = 1) = \overline{A_1} \text{ et si } k \geq 2 \text{ alors}$$

$$(X = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) \cap \overline{A_k}$$

(c) i. $$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ii. Justifions l'existence des probabilités conditionnelles.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

Quelque soit $k \in [\![1,i]\!]$, $B_1 \cap \cdots \cap B_i \subseteq B_1 \cap \cdots \cap B_k$.
Donc du fait de la croissance de la probabilité :

$$P(B_1 \cap \cdots \cap B_i) \leq P(B_1 \cap \cdots \cap B_k)$$

Or

$$0 < P(B_1 \cap \cdots \cap B_i),$$

donc

$$\forall k \in [\![1,i]\!],\ P(B_1 \cap \cdots \cap B_k) > 0$$

Les probabilités conditionnelles
$P(B_2|B_1), \ldots ,P(B_i|B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1})$ existent bien.

Montrons : $P(B_1 \cap \cdots \cap B_i) = P(B_1)P(B_2|B_1)\ldots P(B_i|B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1})$.

Remarquons un télescopage des termes

$$P(B_1 \cap \cdots \cap B_i) = P(B_1)P(B_2|B_1)\ldots P(B_i|B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1})$$
$$= P(B_1)\prod_{k=1}^{i-1} P(B_k|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1})$$
$$= P(B_1)\prod k = 1^{i-1}\frac{P(B_k \cap B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1})}{P(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}$$
$$= P(B_i|B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1})$$

Ainsi

quelque soit $i \in \mathbb{N}^*$

$$P(B_1\cap\cdots\cap B_i) = P(B_1)P(B_2|B_1)\ldots P(B_i|B_1\cap\cdots\cap B_{i-1})$$

(d) i. Déterminons la loi de X.

Clairement $P(X=1) = P(\overline{A_1}) = \frac{b}{b+r}$.

Supposons maintenant que $i \in [\![2,r+1]\!]$.
Nous remarquons que :

$$(X=i) = A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap \overline{A_i}$$

D'où, d'après la question précédente :

$$P(X=i) = P(A_1) \ldots P(A_{i-1}|A_1 \cap \cdots \cap A_{i-2}) P(\overline{A_i}|1_1 \cap \cdots \cap A_{i-1})$$

Or la probabilité de tirer une boule rouge après avoir tiré $k-1$ boules rouges est $\frac{r-(k-1)}{b+r}$ et la probabilité de tirer une blanche est $\frac{b+(k-1)}{b+r}$ d'où

$$\begin{aligned} P(X=i) &= \frac{r}{b+r} \cdots \frac{r-(i-3)}{b+r} \cdot \frac{r-(i-2)}{b+r} \cdot \frac{b+(i-1)}{b+r} \\ &= \frac{1}{(b+r)^i} \cdot \frac{r!}{(r-i+1)!} \cdot (b+i-1) \end{aligned}$$

$$P(X=1) = \frac{b}{b+r}$$

et si $i \in [\![2;n]\!]$ alors

$$P(X=i) = \frac{1}{(b+r)^i} \cdot \frac{r!}{(r-i+1)!} \cdot (b+i-1).$$

ii. Vérifions $P(X=r+1) = \dfrac{r!}{N^r}$.

En utilisant le résultat de la question précédente

$$\begin{aligned} P(X=r+1) &= \frac{1}{(b+r)^{r+1}} \cdot \frac{r!}{(r-(r+1)+1)!} \cdot (b+(r+1)-1) \\ &= \frac{1}{(b+r)^{r+1}} \cdot \frac{r!}{0!} \cdot (b+r) \end{aligned}$$

Enfin en notant $N = b+r$

$$\boxed{P(X = r+1) = \frac{r!}{N^r}.}$$

Vérifions que pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $P(X = k) = \frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k}$.

Si $k = 1$ alors

$$\begin{aligned}
&\frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k}\\
&= \frac{r!}{r!N^0} - \frac{r!}{(r-1)!N^1}\\
&= 1 - \frac{r}{b+r}\\
&= \frac{b}{b+r}\\
&= P(X = 1)
\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![2,r]\!]$.

$$\begin{aligned}
&\frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k}\\
&= \frac{r!N}{(r-(k-1))!N^k} - \frac{r!(r-(k-1))}{(r-(k-1))!N^k}\\
&= \frac{r!N - r!(r-(k-1))}{(r-(k-1))!N^k}\\
&= \frac{r!\left[N-(r-(k-1))\right]}{(r-(k-1))!N^k}\\
&= \frac{r!\left[N-r+k-1\right]}{(r-(k-1))!N^k}\\
&= \frac{r!\left[b+k-1\right]}{(r-(k-1))!N^k}\\
&= \frac{1}{(b+r)^k}\cdot\frac{r!}{(r-k+1)!}\cdot(b+k-1)
\end{aligned}$$

Et d'après la question précédente ceci est bien $P(X = k)$.
Nous avons donc établi

$$k \in [\![1,r]\!],\ P(X=k) = \frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k}$$

(e) i. Démontrons l'égalité proposée.

Si $n=1$ le résultat est trivial.
Soit $\in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $p_0, \ldots, p_n$ des réels.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k(p_{k-1}-p_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kp_{k-1} - kp_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} kp_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kp_k \\
&= 0p_0 + \sum_{k=2}^{n} kp_{k-1} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} kp_k\right) - np_n \\
&= \sum_{l=1}^{n-1} (l+1)p_l - \left(\sum_{k=1}^{n-1} kp_k\right) - np_n \\
&= -np_n + \sum_{l=1}^{n-1} (l+1)p_l - lp_l \\
&= -np_n + \sum_{l=1}^{n-1} p_l
\end{aligned}$$

Nous avons donc établi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (p_0, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k(p_{k-1}-p_k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k\right) - np_n.$$

ii. Déterminons $E(X)$.

$$\begin{aligned}E(X) &= (r+1)P(X=r+1) + \sum_{k=1}^{r} kP(X=k)\\ &= (r+1)\cdot\frac{r!}{N^r} + \sum_{k=1}^{r} k\left(\frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k}\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente

$$\begin{aligned}E(X) &= (r+1)\cdot\frac{r!}{N^r} + \left(\sum_{k=0}^{r-1}\frac{r!}{(r-k)!N^k}\right) - r\frac{r!}{(r-r))!N^r}\\ &= \frac{r!(r+1-r)}{N^r} + \sum_{k=0}^{r-1}\frac{r!}{(r-k)!N^k}\\ &= \sum_{k=0}^{r}\frac{r!}{(r-k)!N^k}\\ &= \sum_{k=0}^{r}\frac{r!}{(r-k)!k!}\cdot\frac{k!}{N^k}\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\frac{k!}{N^k}.}$$

2. (a) i. Déterminons $P(Y_n = k)$ lorsque $k > n$.

Il est impossible d'obtenir plus de boules rouges que de tirages effectués. Donc :

$$\boxed{k > n \Rightarrow P(Y_n = k) = 0}$$

ii. Déterminons $P(Y_n = k)$ lorsque $k > r$.

Les tirages de boules rouges s'effectuant sans remise il est impossible de tirer plus de boules rouges qu'il n'y en a initialement dans l'urne. Donc :

$$\boxed{k > r \Rightarrow P(Y_n = k) = 0}$$

iii.

Déterminons $P(Y_n = 0)$.

$(Y_n = 0)$ est l'événement « à l'issue de n tirages n boules blanches ont été obtenues. En notant B_i l'événement obtenir une boule blanche au i-ième tirage nous avons donc

$$(Y_n = 0) = B_1 \cap \cdots \cap B_n$$

Les tirages de boules blanches s'effectuent avec remise et sans modification de l'expérience. Ces tirages successifs de boules blanches sont donc indépendants et la formule des probabilités composées devient dans ce cas

$$P(Y_n = 0) = P(B_1)^n$$

Autrement dit

$$\boxed{P(Y_n = 0) = \left(\tfrac{b}{r+b}\right)^n}$$

(b) Exprimons $P(Y_n = k|Y_{n-1} = i)$.

Soient $k \in [\![0,n]\!]$ et $i \in [\![0,n-1]\!]$.

Il est impossible d'avoir k boules rouges au tirage de rang n tirage sachant qu'il y avait i au tirage de rang $n-1$ si i est différent de k ou de $k-1$:

$$\boxed{i \notin \{k,k-1\} \Rightarrow P(Y_n = k|Y_{n-1} = i) = 0}$$

Étudions les deux cas restants.

D'une part, puisqu'aux tirages de rang n et $n-1$ il y a le même nombre de boules rouges il faut nécessairement qu'une boule blanche soit tirée et donc

$$\boxed{P(Y_n = k|Y_{n-1} = k) = P(Y_{n-1} = k) \cdot \frac{b+k}{b+r}}$$

d'autre part, puisque au tirage de rang n il y a une boule rouge de plus qu'au rang $n-1$ c'est qu'une boule rouge a été tirée et donc

$$\boxed{P(Y_n = k|Y_{n-1} = k-1) = P(Y_{n-1} = k-1) \cdot \frac{r-(k-1)}{b+r}}$$

Exprimons $P(Y_n = k)$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

Il est impossible de tirer simultanément une boule rouge et une boule blanche donc

$$(Y_n = k|Y_{n-1} = k) \cap (Y_n = k|Y_{n-1} = k-1) = \emptyset$$

les événements sont disjoints.
Autrement dit, puisqu'il n'y a pas d'autre alternative que rouge ou blanc

$$(Y_n = k|Y_{n-1} = k) \sqcup (Y_n = k|Y_{n-1} = k-1) = (Y_n = k)$$

D'où

$$P(Y_n = k|Y_{n-1} = k) + (Y_n = k|Y_{n-1} = k-1) = P(Y_n = k)$$

et ce quel que soit $k \in [\![1,n]\!]$.
Autrement dit, en tenant compte de ce qui a déjà été démontré dans cette question,

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ \ P(Y_n = k) = P(Y_{n-1} = k-1) \cdot \frac{r-(k-1)}{b+r} + P(Y_{n-1} = k) \cdot \frac{b+k}{b+r}.}$$

(c) Exprimons l'espérance telle que demandée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question B.2.(a)

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} kP(Y_n = k)$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\left[P(Y_{n-1}=k-1)\cdot\frac{r-(k-1)}{b+r}+P(Y_{n-1}=k)\cdot\frac{b+k}{b+r}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(Y_{n-1}=k-1)\cdot\frac{r-k+1}{N}+\sum_{k=1}^{n} kP(Y_{n-1}=k)\cdot\frac{b+k}{N}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)P(Y_{n-1}=k)\cdot\frac{r-k}{N}+\sum_{k=1}^{n} kP(Y_{n-1}=k)\cdot\frac{b+k}{N}\\
&= P(Y_{n-1}=0)\cdot\frac{r}{N}+nP(Y_{n-1}=n)\cdot\frac{b+n}{N}\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}\left[(k+1)\cdot\frac{r-k}{N}+k\cdot\frac{b+k}{N}\right]P(Y_{n-1}=k)
\end{aligned}$$

Or, d'après la question B.2.(a), $P(Y_{n-1}=n)=0$, donc

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= \frac{r}{N}P(Y_{n-1}=0)+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n-1}\left[(k+1)(r-k)+k(b+k)\right]P(Y_{n-1}=k)\\
&= \frac{r}{N}P(Y_{n-1}=0)+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n-1}\left[r+k(r-1+b)\right]P(Y_{n-1}=k)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\left[r+k(r-1+b)\right]P(Y_{n-1}=k)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ E(Y_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{r+k(N-1)}{N}P(Y_{n-1}=k)}$$

Démontrons la seconde expression proposée pour $E(Y_n)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
E(Y_n)&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{r+k(N-1)}{N}P(Y_{n-1}=k)\\
&=\frac{r}{N}\left[\sum_{k=0}^{n-1}P(Y_{n-1}=k)\right]+\left(1-\frac{1}{N}\right)\sum_{k=0}^{n-1}kP(Y_{n-1}=k)
\end{aligned}$$

Puisque $(P(Y_{n-1}=k))_{1\leq k\leq n-1}$ est une distribution de probabilité

$$E(Y_n) = \frac{r}{N}\cdot 1 + \frac{N-1}{N}E(Y_{n-1})$$

Enfin

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{quelque soit } n \in \mathbb{N}*, \\ E(Y_n) = \left(1-\dfrac{1}{N}\right)E(Y_{n-1}) + \dfrac{r}{N}.\end{array}}$$

(d) i. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: « $E(Y_n) = r\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)\right]$ ».

Nous pourrions commencer la récurrence pour $n = 0$, puisque Y_n est défini dans l'énoncé.

Démontrons que $P(1)$ est vraie.
De façon claire, lors du premier tirage il possible d'obtenir 1 boule rouge avec une probabilité de $\frac{r}{N}$ ou 0 boule rouge avec une probabilité de $1-\frac{r}{N}$.
Donc

$$E(Y_1) = \frac{r}{N}1 + \left(1-\frac{r}{N}\right).0 = \frac{r}{n} = r\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)\right]$$

Ainsi $P(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $P(n+1)$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence : $E(Y_n) = r\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]$.
Donc en utilisant la formule de récurrence établie à la question précédente

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}) &= \left(1-\frac{1}{N}\right)E(Y_n) + \frac{r}{N} \\ &= \left(1-\frac{1}{N}\right)r\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right] + \frac{r}{N} \\ &= r\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

Nous avons donc établi par récurrence sur n que

$$\boxed{\text{quelque soit } n \in \mathbb{N}^*, \quad E(Y_n) = r\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]}$$

ii. Étudions la convergence de $(E(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

$0 < 1 - \frac{1}{N} < 1$ donc la suite géométrique $\left(\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
D'où

$$\boxed{(E(Y_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } r.}$$

Donc, d'après la définition de Weierstrass de la convergence d'une suite,

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N},\ |E(Y_n) - r| \leq \tfrac{1}{4}.}$$

3. (a) Déterminons $P(A_{k+1})$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
A_{k+1} désignant le fait de tirer une boule rouge au $k+1$-ième tirage et Y_k désignant le nombre de boules rouges tirées à la suite de k tirages, nous déduisons

$$A_{k+1} \subset \bigsqcup_{i=1}^{k} (Y_k = 1)$$

Donc, d'après la formule des probabilités totales

$$P(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} P(A_{k+1}|Y_k = i)P(Y_k = i)$$

Si i boules rouges ont été tirées au bout de k tirages il en reste $r - i$ parmi les N de l'urne, donc

$$P(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{r-i}{N} P(Y_k = i)$$

Ainsi

$$\boxed{\begin{gathered}\text{quelque soit } k \in \mathbb{N}^* \\ P(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{r-i}{N} P(Y_k = i)\end{gathered}}$$

(b) Exprimons $P(A_{k+1})$ en fonction de $E(Y_k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question précédente

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= \frac{1}{N}\left[r\left(\sum_{i=1}^{n} P(Y_k = i)\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} iP(Y_k = i)\right)\right] \\ &= \frac{1}{N}\left[r - E(Y_k)\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(A_{k+1}) = \frac{r - E(Y_k)}{N}}$$

Exprimons $P(A_{k+1})$ en fonction de r, k et N.

D'après la question B.2.(d).(i)

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= \frac{r - r\left[1 - (1 - \frac{1}{N})^k\right]}{N} \\ &= \frac{r}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^k \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(A_{k+1}) = \frac{r}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^k.}$$

4. (a) Déterminons $E(Y_n(Y_n - 1))$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $f : x \mapsto x(x-1)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

D'après le théorème du transfert

$$E\left(f(Y_n)\right) = \sum_{k\in[\![0,n]\!]} P(Y_n = k)f(k)$$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \sum_{k\in[\![1,n]\!]} P(Y_n)k(k-1)$$

D'après la question B2(b)

$$E\left(f(Y_n)\right) = \sum_{k\in[\![1,n]\!]} \left[\frac{b+r}{N}P(Y_{n-1}=k) + \frac{r+1-k}{N}P(Y_{n-1}=k-1)\right]k(k-1)$$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k\in[\![1,n]\!]}(b+k)P(Y_{n-1}=k)k(k-1)\right.$$
$$\left. + \sum_{k\in[\![1,n]\!]}(r+1-k)P(Y_{n-1}=k-1)k(k-1)\right]$$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \frac{(b+n)}{N}P(Y_{n-1}=n)n(n-1)$$
$$+\frac{1}{N}\left[\sum_{k\in[\![1,n-1]\!]}(b+k)P(Y_{n-1}=k)k(k-1)\right.$$
$$\left. + \sum_{l\in[\![1,n-1]\!]}(r-l)P(Y_{n-1}=l)(l+1)l\right]$$
$$+\frac{(r+1-n)}{N}P(Y_{n-1}=n)n(n-1)$$

Puisque $P(Y_{n-1}=n)=0$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \frac{1}{N}\sum_{k\in[\![1,n-1]\!]} k\left[(b+k)(k-1)+(r-k)(k+1)\right]P(Y_{n-1}=k)$$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \frac{1}{N}\sum_{k\in[\![1,n-1]\!]} k\left[(b+k+r-k)(k-1)+2(r-k)\right]P(Y_{n-1}=k)$$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \frac{1}{N}\sum_{k\in[\![1,n-1]\!]} k\left[N(k-1)+2(r-k)\right]P(Y_{n-1}=k)$$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \frac{1}{N}\sum_{k\in[\![1,n-1]\!]} k\left[(N-2)(k-1)+2(k-1)+2(r-k)\right]P(Y_{n-1}=k)$$

Quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E\left(Y_n(Y_n-1)\right)$ vaut

$$\sum_{k\in[\![1,n-1]\!]} \frac{k(k-1)(N-2)+2(r-1)k}{N} P(Y_{n-1}=k)$$

(b) Nous allons utiliser le résultat de la question précédente, le théorème du transfert, la définition de l'espérance et une expression de $E(Y_n)$ trouvée à une question précédente.

Démontrons l'expression proposée pour $E(Y_n(Y_n-1))$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente

$$\begin{aligned} E(Y_n(Y_n-1)) = \frac{N-2}{N} &\sum_{1\leq k\leq n-1} k(k-1)P(Y_{n-1}=k) \\ &+ \frac{2(r-1)}{N} \sum_{1\leq k\leq n-1} kP(Y_{n-1}=k) \end{aligned}$$

D'après le théorème du transfert

$$\begin{aligned} E(Y_n(Y_n-1)) = \frac{N-2}{N} &\sum_{1\leq k\leq n-1} k(k-1)P(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1)=k) \\ &+ \frac{2(r-1)}{N} \sum_{1\leq k\leq n-1} kP(Y_{n-1}=k) \\ E(Y_n(Y_n-1)) = \frac{N-2}{N}&E\left(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1)\right) + \frac{2(r-1)}{N}E(Y_{n-1}) \end{aligned}$$

D'après la question B.2.(d).i.

$$\begin{aligned} E(Y_n(Y_n-1)) = \frac{N-2}{N}&E\left(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1)\right) \\ &+ \frac{2(r-1)}{N} r\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Pour tout entier n strictement positif, $E(Y_n(Y_n-1))$ égale
$$\left(1-\frac{2}{N}\right)E(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1))+\frac{2r(r-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right).$$

(c) Initialisation au rang 0 sans difficulté.
Hérédité avec la formule de récurrence de la question précédente, l'hypothèse de récurrence et un peu de bidouille calculatoire.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n):\ E(Y_n(Y_n-1)) = r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right).$$

$E(Y_0(Y_0-1)) = 0P(Y_0=0) = 0$.
$r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^0 - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^0\right) = 0$.
Donc $P(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $P(n)$ vraie et démontrons qu'alors $P(n+1)$ l'est aussi.
D'après la question précédente

$$\begin{aligned} &E(Y_{n+1}(Y_{n+1}-1)) \\ &\quad = \left(1-\frac{2}{N}\right)E(Y_n(Y_n-1)) + \frac{2r(r-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right) \end{aligned}$$

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} &E(Y_{n+1}(Y_{n+1}-1)) \\ &\quad = \left(1-\frac{2}{N}\right)r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right) \\ &\quad + \frac{2r(r-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&E(Y_{n+1}(Y_{n+1}-1))\\
&= r(r-1)\left[\left(1-\frac{2}{N}\right)+\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n\right.\\
&\quad\left. -2\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)^n+\frac{2}{N}-\frac{2}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]\\
&= r(r-1)\left[1-\frac{2}{N}+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1}\right.\\
&\quad\left. -2\left[\left(1-\frac{2}{N}\right)+\frac{1}{N}\right]\left(1-\frac{1}{N}\right)^n+\frac{2}{N}\right]\\
&= r(r-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1}-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\boxed{E(Y_n(Y_n-1)) = r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)}$$

(d) Nous allons utiliser la formule Huygens et de la linéarité de l'espérance.

Exprimons $V(Y_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la formule de Huygens

$$\begin{aligned}
V(Y_n) &= E(Y_n^2)-E(Y_n)^2\\
&= E(Y_n(Y_n-1)+Y_n)-E(Y_n)^2
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance

$$V(Y_n) = E(Y_n(Y_n-1))+E(Y_n)-E(Y_n)^2$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ V(Y_n) = E(Y_n(Y_n-1))+E(Y_n)-E(Y_n)^2}$$

(e) Il s'agit d'utiliser la formule de la question précédente et les formules de $E(Y_n)$ trouvée à la question et B.2.(d).i et de $E(Y_n(Y_n-1))$ trouvée à la question B.4.(c).

Démontrons la formule proposée pour $V(Y_n)$.

D'après la question précédente

$$V(Y_n) = E(Y_n(Y_n-1)) + E(Y_n) - E(Y_n)^2$$

D'après les questions B.2.(d).i et B.4.(c)

$$\begin{aligned} V(Y_n) = r(r-1)&\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right) + r\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right) \\ &- r^2\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)^2 \end{aligned}$$

En développant

$$\begin{aligned} V(Y_n) &= r(r-1) + r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2r(r-1)\left(1-\frac{1}{N}\right)^n \\ &\quad + r - r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2 + 2r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n} \\ V(Y_n) &= r^2 - r + r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n + 2r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n \\ &\quad + r - r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2 + 2r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n} \end{aligned}$$

Ce qui se simplifie en

$$V(Y_n) = r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n + r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}$$

Nous avons donc démontré que

$$\boxed{\begin{gathered}\text{quelque soit } n\in\mathbb{N}^*, \\ V(Y_n) = r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n + r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}.\end{gathered}}$$

5. (a) Il suffit d'utiliser la formule trouvée à la question précédente.

Déterminons $\lim_{n\to+\infty} V(Y_n)$.

D'après la question précédente $(V(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire de suites géométriques dont les raisons sont toutes dans $[0,1[$.
Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V(Y_n) = 0.}$$

(b) Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis par encadrement de suites et d'après la question précédente concluons.

Démontrons la convergence proposée.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Y_n est une variable aléatoire réelle, donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$0 \leq P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha) \leq \frac{V(Y_n)}{\alpha^2}$$

Puisque $V(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, par encadrement de la limite de la suite nous concluons

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha) = 0.}$$

(c) Il faut utiliser la limite trouvée à la question précédente en utilisant à nouveau la comparaison de suite. Pour obtenir la comparaison avec la suite de la question précédente il faudra utiliser la croissance de la probabilité.

Démontrons que $(P(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Quelque soient x et y réels : $|x| - |y| \leq |x - y|$.
Donc quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \leq |Y_n - E(Y_n)|$$

Donc si :

$$|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha,$$

alors

$$|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha.$$

Autrement dit

$$\{|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha\} \subseteq \{|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha\}$$

Du fait de la croissance et de la positivité de la fonction probabilité

$$0 \leq P\left(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha\right) \leq P\left(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha\right)$$

Puisque $P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, par encadrement de la limite de la suite nous concluons

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha) = 0.}$$

(d) La démarche est détaillée par l'énoncé. Nous allons montrer que les ensembles des événements sont égaux.

Montrons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow P(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha) = P(Y_n \neq r).$$

Soit $n \geq n_0$.

i. $\subseteq$
D'où, α étant supposé égale à $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha \\
&\Leftrightarrow |Y_n - r| \geq \frac{1}{2} + |r - E(Y_n)| \\
&\Rightarrow |Y_n - r| \geq \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow Y_n \neq r
\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\{|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha\} \subseteq \{Y_n \neq r\}$$

ii. $\supseteq$
D'après la question B.2.(d).ii, et par construction de n_0,

$$|r - E(Y_n)| \leq \frac{1}{4}$$

D'autre part si $Y_n \neq r$ alors, Y_n étant un entier,

$$|Y_n - r| \geq 1.$$

Donc, puisque $|E(Y_n) - r| \leq \frac{1}{4}$,

$$|Y_n - r| - |E(Y_n) - r| \geq 1 - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$$

d'où

$$\{Y_n \neq r\} \subseteq \{|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha\}$$

Finalement

$$P\left(Y_n \neq r\right) = P\left(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha\right)$$

(e) Montrons que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi.

D'après les deux questions précédentes

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \neq r) = 0$$

Autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - r| \geq \varepsilon) = 0$$

Finalement

$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers r.

Ainsi les boules rouges sont toutes tirées.