Capes externe de mathématique épreuve 2.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

I Problème 1.

Notation. Pour m et n deux entiers naturels tels que $m \leq n$, $[\![m,n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leq k \leq n$.

Voici un problème proposé aux élèves d'une classe de première :

Aline et Bertrand commandent chacun un café et une carafe de lait. Aline ajoute immédiatement le lait dans son café puis attend trois minutes que le mélange se refroidisse avant de le boire. Bertrand attend trois minutes que le café refroidisse avant d'y ajouter le lait.

Question posée aux élèves : qui d'Aline ou Bertrand a bu le café au lait le plus chaud ?

Données :

- Chaque café est servi à la température de 48 °C.
- La température ambiante T_a, qui est aussi celle du lait, est de 22 °C.
- Chaque tasse contient 15 cL de café et chacun y ajoute 3 cL de lait.
- Lorsque l'on mélange un volume V_1 d'un premier liquide à température T_1 et un volume V_2 d'un second liquide à la température T_2, on obtient un liquide dont la température est égale à
$$\frac{V_1T_1 + V_2T_2}{V_1 + V_2}.$$
- L'évolution, à partir d'un temps initial t_0, de la température d'un liquide est modélisé par l'équation différentielle :
$$(\mathcal{E}) \quad T'(t) = -0{,}04\,(T(t) - T_a)\,,$$
où T_a désigne la température ambiante exprimée en degré Celsius, $T(t)$ la température du liquide exprimé en degré Celsius à l'instant t (exprimé en minute) et $T'(t)$ la valeur à l'instant t de la dérivée de la fonction T.

La théorie des équations différentielles n'étant pas au programme des classes de première, le professeur décide d'utiliser une méthode de résolution approchée, appelée méthode d'Euler, dont le principe est le suivant :

Méthode d'Euler : on part d'une condition initiale $T(0) = \alpha$, où α est un nombre réel, et d'un relation

$$(\mathcal{R}) \quad T'(t) = F\left(T(t)\right),$$

vérifiée par une fonction T dérivable sur $[0,a]$, où a est un réel strictement positif et F une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On détermine une valeur approchée de $T(a)$ selon procédé détaillé ci-dessous.
On choisit un entier n strictement positif.
On détermine une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = a$ partageant l'intervalle $[0,a]$ en n intervalles de même longueur.
On pose $y_0 = \alpha$. On note $\mathcal{D}_0$ la droite passant par le point A_0 de coordonnées $(t_0; y_0)$ et de coefficient directeur $F(y_0)$.
On note A_1 le point d'abscisse t_1 de la droite $\mathcal{D}_0$. L'ordonnée y_1 de ce point est prise comme valeur approchée de $T(t_1)$.
On note $\mathcal{D}_1$ la droite passant par A_1 et de coefficient directeur $F(y_1)$. On note A_2 le point de $\mathcal{D}_1$ d'abscisse t_2. L'ordonnée y_2 de ce point est prise comme valeur approchée de $T(t_2)$.
On itère ce processus jusqu'à y_n, qui est prise comme valeur approchée de $T(a)$.

Partie A : mise en œuvre de la méthode d'Euler.

Soit n un entier strictement positif. On applique la méthode d'Euler à l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. On note $T_n(3)$ le valeur approchée de $T(3)$ obtenue selon le procédé détaillé ci-dessus. Dans toute la suite, on note (t_k,y_k) les coordonnées des points A_k construits à la k-ième étape de la méthode d'Euler.

1. Exprimer les réels $t_0,\ldots,t_n$ subdivisant le segment $[0,3]$ en n intervalles de même longueur.

   Clairement
   $$\forall k \in [\![0,n]\!],\ t_k = k\frac{a}{n} + a$$

2. Pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}_k$.

   Puisque
   $$\forall i \in [\![0,n-1]\!],\ t_i \neq t_{i+1}$$
   quelque soit $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\mathcal{D}_k$ admet une équation réduite.
   Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$.

   Déterminons l'équation réduite de $\mathcal{D}_k$.

   Par construction le coefficient directeur est $F(y_k)$.

$\mathcal{D}_k$ passe par le point $A_k(t_k,y_k)$ donc en notant b l'ordonnée à l'origine

$$y_k = F(y_k)t_k + b$$

D'où $b = y_k - F(y_k)t_k$.
Enfin

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \mathcal{D}_k : y = F(y_k)x + y_k - F(y_k)t_k}$$

3. En déduire que $y_{k+1} = \left(1 - \dfrac{0{,}12}{n}\right) y_k + \dfrac{2{,}64}{n}$.

Démontrons l'égalité proposée.

Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$.

$$\left\{\begin{array}{l} A_{k+1} \in \mathcal{D}_k \\ A_{k+1}(t_{k+1},y_{k+1}) \\ \mathcal{D}_k :\ y = F(y_k)x + y_k - F(y_k)t_k \end{array}\right. \Rightarrow y_{k+1} = F(y_k)(t_{k+1} - t_k) + y_k$$

Or $t_{k+1} - t_k = \frac{a}{n}$ par construction donc

$$y_{k+1} = F(y_k)\frac{a}{n} + y_k$$

Dans le cadre de l'exercice $F(x) = -0{,}04(x-22)$ et $a = 3$ donc

$$y_{k+1} = -0{,}04(y_k - 22)\frac{3}{n} + y_k$$

Finalement

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ y_{k+1} = \left(1 - \frac{0{,}12}{n}\right) y_k + \frac{2{,}64}{n}}$$

4. Le professeur demande aux élèves de donner des valeurs approchées des températures du café de Bertrand et du café d'Alice au bout de trois minutes à l'aide de la méthode d'Euler. Voici la production d'un élève ayant utilisé un tableur pour calculer la température du café de Bertrand :

	A	B
1	Température ambiante	22
2	Température initiale	48
3	n	20
4		
5	Temps	Température café
6	0	48
7	1	47,844
8	2	47,688 936
9	3	47,534 802 384
10	4	47,381 593 569 7
11	5	47,229 304 008 3
12	6	47,077 928 184 2

(a) Quelle formule l'élève a-t-il pu saisir dans la cellule `B7` pour obtenir ces résultats en étirant la formule vers le bas et en utilisant les données contenues dans les cellules `B1`, `B2` et `B3` ?

D'après la question précédente

$$=(1-0{,}04*3/\$\texttt{B}\$3)*\texttt{B6}+0{,}04*\$\texttt{B}\$1*3/\$\texttt{B}\$3$$

(b) Comment l'élève peut-il modifier sa production pour calculer une valeur approchée de la température du café au lait d'Aline au bout de trois minutes ?

Déterminons la température du café après mélange de Aline.

$$\begin{aligned}
T_i &= \frac{V_1T_1+V_2T_2}{V_1+V_2}\\
&= \frac{15\times 48+3\times 22}{15+3}\\
&= \frac{131}{3}
\end{aligned}$$

L'élève devra entrer $=131/3$ en `B2`.

5. (a) Écrire un algorithme permettant d'obtenir y_n à partir des entrées $\alpha = T(0)$ et $n\in\mathbb{N}$.

```
Entrée
        Saisir α, n
Traitement
        Pour k allant de 0 à n − 1 faire
            | Affecter −0,04(α − 22) ∗ 3/n + α à α
        Fin Pour
Sortie
        Afficher α
```

(b) Utiliser cet algorithme pour répondre à la question posée dans le problème en prenant $n = 2$.

Pour Aline, avec $\alpha = 131/3$ nous obtenons une température finale de $T(3) \approx 41{,}14$ °C.

Pour Bernard $T(3) = 44{,}9736$ °C. Donc après mélange la température sera d'approximativement $41{,}14$ °C.

Partie B : résolution exacte.

1. Soit α un réel strictement positif. Déterminer la solution exacte du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = -0{,}04\,(y(t) - 22) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Résolvons le problème de Cauchy.

L'équation $(E_1)\quad y' = -0{,}04(y-22)$ est linéaire du premier ordre à coefficient constant, les solutions de l'équation homogène associée forment l'ensemble $\left\{t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-0{,}04t} | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ et la fonction constante égale à 22 est une solution particulière de E_1.
L'ensemble des solutions de E_1 est formé des fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-0{,}04t} + 22$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y(0) = \alpha &\Leftrightarrow \lambda \mathrm{e}^{-0{,}04\times 0} + 22 = \alpha \\ &\Leftrightarrow \lambda = \alpha - 22 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\text{L'unique solution au problème de Cauchy proposé est } \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\alpha - 22)\mathrm{e}^{-0{,}04t} + 22 \end{array}\right. .}$$

2. En appliquant le résultat de la question précédente pour deux valeurs bien choisies de α, répondre à la question posée aux élèves. On donnera une valeur approchée décimale de la température en degré Celsius des cafés au lait d'Aline et de Bertrand à 10^{-2} près.

   Si $\alpha = 48$ alors $T(3) = (48-22)\mathrm{e}^{-0,04\times 3} + 22 = 26\mathrm{e}^{-0,12} + 22$. Puis après mélange $T_f = \frac{15\times\left(26\mathrm{e}^{-0,12}+22\right)+3\times 22}{15+3} = \frac{65}{3}\mathrm{e}^{-0,12} + 22$.
   Si $\alpha = \frac{131}{3}$ (mélange initial) alors $T(3) = \frac{65}{3}\mathrm{e}^{-0,12} + 22$.

   Dans les deux cas la température est la même.

Partie C : étude de la convergence de la méthode d'Euler.

On étudie la convergence de la suite $(T_n(3))_{n\geq 1}$ quand n tend vers $+\infty$ lorsqu'on prend la condition initiale $\alpha = 48$.

1. Dans cette question, n est fixé.

   (a) Donner deux réels a et b tels que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$,

   $$y_{k+1} = ay_k + b$$

   D'après une question précédente $y_{k+1} = \left(1 - \frac{0,12}{n}\right) y_k + \frac{2,64}{n}$.
   Donc par identification $a = 1 - \frac{0,12}{n}$ et $b = \frac{2,64}{n}$.

   (b) Déterminer le réel l tel que $l = al + b$.

   Il s'agit d'une équation linéaire du premier degré : $l = \frac{b}{1-a} = 22$.

   (c) En considérant la suite $(y_k - l)_{k\in[\![0,n]\!]}$, exprimer $y_n = T_n(3)$ en fonction de n.

   Exprimons y_n en fonction de n.

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{0,12}{n}\right)y_k + \frac{2,64}{n} &= \left(1-\frac{0,12}{n}\right)y_k - 22\left(1-\frac{0,12}{n}\right)\\ &\quad + 22\left(1-\frac{0,12}{n}\right) + \frac{2,64}{n}\\ &= \left(1-\frac{0,12}{n}\right)(y_k - 22) + 22\end{aligned}$$

Donc

$$y_{k+1} - 22 = \left(1 - \frac{0{,}12}{n}\right)(y_k - 22)$$

$(y_k)_{0 \le k \le n}$ est donc géométrique et

$$y_n = \left(1 - \frac{0{,}12}{n}\right)^n (\alpha - 22) + 22$$

2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n(3)$ et comparer avec le résultat obtenu dans la partie B.

Déterminons l'éventuelle limite de $T_n(3)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$$T_n(3) = y_n = \left(1 - \frac{0{,}12}{n}\right)^n (\alpha - 22) + 22$$

Quelque soit x réel,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x$$

Démontrons le. Clairement

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [\ n > N\ ] \Rightarrow \left|\frac{x}{n}\right| < 1$$

Soit $n > N$ un entier naturel.

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \exp \circ \ln \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right] \\ &= \exp \left[n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)\right] \\ &= \exp \left[x \frac{n}{x} \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)\right] \\ &= \exp \left[x \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right]\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

nous en déduisons

$$\exp \left[x \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \exp(x)$$

Pour conclure

$$\boxed{T_n(3) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (\alpha-22)\mathrm{e}^{-0{,}12}+22}$$

Nous retrouvons bien le résultat obtenu à la question **B**.1.

3. Déterminer un équivalent de $|T(3)-T_n(3)|$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Recherchons l'équivalent.

$$\begin{aligned}
T(3)-T_n(3) &= (\alpha-22)\mathrm{e}^{-0{,}12}+22-\left[\left(1-\frac{0{,}12}{n}\right)^n(\alpha-22)+22\right]\\
&= (\alpha-22)\left[\mathrm{e}^{-0{,}12}-\exp\left(n\ln\left(1-\frac{0{,}12}{n}\right)\right)\right]\\
&= (\alpha-22)\mathrm{e}^{-0{,}12}\left[1-\exp\left(0{,}12+n\ln\left(1-\frac{0{,}12}{n}\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

Or

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)$$

donc

$$n\ln\left(1-\frac{0{,}12}{n}\right)=-0{,}12-\frac{0{,}12^2}{2}\cdot\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où

$$\exp\left[0{,}12+n\ln\left(1-\frac{0{,}12}{n}\right)\right]=\exp\left[-\frac{0{,}12^2}{2}\cdot\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

En utilisant le développement limité d'exponentielle en 0.

$$\begin{aligned}
\exp\left[0{,}12+n\ln\left(1-\frac{0{,}12}{n}\right)\right] &= 1+\left[-\frac{0{,}12^2}{2}\cdot\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&= 1-\frac{0{,}12^2}{2}\cdot\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
T(3)-T_n(3) &= (\alpha-22)\mathrm{e}^{-0{,}12}\left[-\frac{0{,}12^2}{2}\cdot\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&= -\frac{1}{2}(\alpha-22)\mathrm{e}^{-0{,}12}\cdot0{,}12^2\cdot\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{|T(3) - T_n(3)| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(\alpha - 22)\mathrm{e}^{-0{,}12} \cdot 0{,}12^2}{2} \cdot \frac{1}{n}.}$$

II Problème 2.

Notation. Pour m et n deux entiers naturels tels que $m \leq n$, $[\![m,n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leq k \leq n$.

Le protocole de tirage d'une boule dans une urne, décrit ci-dessous, est utilisé tout au long de ce problème.

> Une urne contient b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher (b et r sont des entiers naturel dont au moins un est non nul).
> On tire une boule au hasard dans l'urne. Si elle est blanche, on la remet dans l'urne. Si elle est rouge, elle n'est pas remise dans l'urne et elle y est remplacée par une boule blanche, de sorte que le nombre $N = b + r$ de boules dans l'urne reste constant.

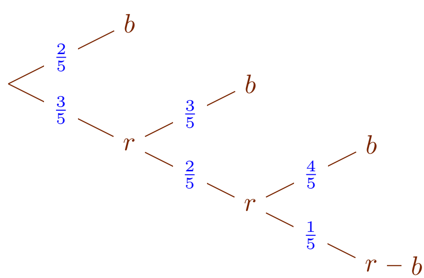
Le but de ce problème est d'étudier plusieurs expériences aléatoires de tirages successifs en suivant ce protocole.

Partie A : un cas particulier.

On suppose dans cette partie que $b = 2$ et $r = 3$.

1. **Première expérience aléatoire.** On répète le protocole de tirage jusqu'à l'obtention d'une boule blanche.

   (a) Modéliser cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.



(b) On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

i. Quelles sont les valeurs prises par X ?

D'après l'arbre

$$X \in [\![1,4]\!].$$

ii. Déterminer la loi de a variable aléatoire X et calculer son espérance $E(X)$. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} près ainsi qu'une interprétation de cette espérance.

Déterminons la loi de probabilité de X.

Les tirages étant indépendants les uns des autres :

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$	$\frac{4\times3\times2}{5^3}$	$\frac{3\times2}{5^3}$

Calculons $E(X)$.

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{i=1}^{4} x_i P(X=x_i) \\ &= \frac{2}{5}\times 1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times 2 + \frac{4\times3\times2}{5^3}\times 3 + \frac{3\times2}{5^3}\times 4 \\ &= \frac{236}{125} \\ &= 1{,}888 \end{aligned}$$

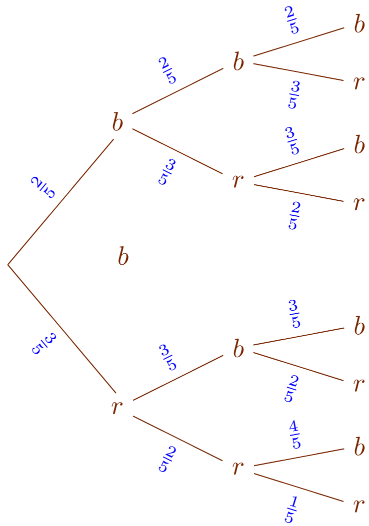
Donc une valeur approchée à 10^{-2} près par excès est

$$E(X) \approx 1{,}89$$

Si la première expérience est indéfiniment recommencée, en moyenne il faut 1,89 tirages avant d'obtenir une boule blanche.

2. **Seconde expérience aléatoire.** On effectue trois fois le protocole de tirage.

(a) Modéliser cette expérience à l'aide d'un arbre probabiliste.



(b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

i. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

$Y \in [\![0,3]\!]$

ii. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et calculer son espérance $E(Y)$. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} près ainsi qu'une interprétation de cette espérance.

Déterminons la loi de probabilité de Y.

Par exemple

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5} \\ &= \frac{54}{125} \end{aligned}$$

Donc :

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{6}{125}$

Calculons $E(X)$.

$E(X) = \frac{183}{125} = 1{,}464$.

Si les trois tirages sont indéfiniment recommencés ont peut espérer en moyenne 1,464 boules rouges parmi les trois tirées.

3. L'algorithme suivant utilise une fonction **alea**$(1..n)$ qui rend un nombre entier aléatoire obtenu de façon équiprobable dans l'ensemble $[\![1,n]\!]$.

```
Entrer(b,r)
d ← alea(1,..,b + r)
Si (d > b) Alors
    résultat ← rouge
    b ← b + 1
    r ← r − 1
Sinon
    résultat ← blanche
Fin Si
Retourner(résultat)
```

(a) Que simule cet algorithme ?

Cet algorithme simule le protocole de tirage décrit dans l'énoncé.

(b) Compléter cet algorithme en un nouvel algorithme simulant la variable aléatoire X.

```
Entrer(b,r)
d ← alea(1,..,b + r)
N ← 0
Tant que (N < 3)
    Si (d > b) Alors
        résultat ← rouge
        b ← b + 1
        r ← r − 1
        X ← X + 1
    Sinon
        résultat ← blanche
    Fin Si
    N ← N + 1
Fin Tant que
Retourner X
```

Partie B : généralisation.

Dans cette partie, on généralise les résultats obtenus précédemment au cas où b et r sont des entiers naturels non nuls quelconques.

1. **Première expérience aléatoire.** On répète le protocole de tirage jusqu'à l'obtention d'une boule blanche. Pour tout entier strictement positif n, on note A_n l'événement « la n-ième boule tirée est rouge ». On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

(a) Donnez l'ensemble E des valeurs prises par X.

Puisqu'on retire une boule rouge à chaque fois qu'une boule rouge est tirée nous pouvons tirer au maximum r boules rouges d'affilée.
Donc $X \in [\![1,r+1]\!]$

$$\boxed{E = [\![1,r+1]\!]}$$

(b) Pour $k \in E$, exprimer l'événement $(X = k)$ en fonction d'événements liés aux événements $A_1,A_2,\ldots,A_k$.

Pour $i \in E$, A_i indique tirer une boule rouge et $\overline{A_i}$ tirer une boule blanche. Si $(X = k)$ cela signifie que la k-ième boule tirée est blanche et que les éventuelles précédentes sont toutes rouges.

$$(X = 1) = \overline{A_1} \text{ et si } k \geq 2 \text{ alors}$$

$$(X = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i \right) \cap \overline{A_k}$$

(c) **Question de cours.** Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé.

i. Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tels que $P(B) > 0$. Rappeler la définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B. On la notera $P(A|B)$ ou $P_B(A)$.

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

ii. Soit i un entier strictement positif et soient $B_1,\dots,B_i$ des événements de $\mathcal{A}$ tels que $P(B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}) > 0$. Après avoir justifier l'existence des probabilité conditionnelles $P(B_2|B_1),\dots,P(B_i|B_1 \cap \dots \cap B_{i-1})$, montrer que

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_i) = P(B_1)P(B_2|B_1)\dots P(B_i|B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}).$$

Justifions l'existence des probabilités conditionnelles.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

Quelque soit $k \in [\![1,i]\!]$, $B_1 \cap \dots \cap B_i \subseteq B_1 \cap \dots \cap B_k$.
Donc du fait de la croissance de la probabilité :

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_i) \leq P(B_1 \cap \dots \cap B_k)$$

Or

$$0 < P(B_1 \cap \dots \cap B_i),$$

donc

$$\forall k \in [\![1,i]\!],\ P(B_1 \cap \dots \cap B_k) > 0$$

Les probabilités conditionnelles
$P(B_2|B_1),\dots,P(B_i|B_1 \cap \dots \cap B_{i-1})$ existent bien.

Montrons : $P(B_1 \cap \dots \cap B_i) = P(B_1)P(B_2|B_1)\dots P(B_i|B_1 \cap \dots \cap B_{i-1})$.

Remarquons un télescopage des termes

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_i) = P(B_1)P(B_2|B_1)\dots P(B_i|B_1 \cap \dots \cap B_{i-1})$$
$$= P(B_1)\prod_{k=1}^{i-1} P(B_k|B_1 \cap \dots \cap B_{k-1})$$
$$= P(B_1)\prod k = 1^{i-1}\frac{P(B_k \cap B_1 \cap \dots \cap B_{k-1})}{P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}$$
$$= P(B_i|B_1 \cap \dots \cap B_{i-1})$$

Ainsi

quelque soit $i \in \mathbb{N}^*$

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_i) = P(B_1)P(B_2|B_1)\dots P(B_i|B_1 \cap \dots \cap B_{i-1})$$

(d) i. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Déterminons la loi de X.

Clairement $P(X=1)=P(\overline{A_1})=\frac{b}{b+r}$.

Supposons maintenant que $i\in [\![2,r+1]\!]$.
Nous remarquons que :

$$(X=i)=A_1\cap\dots\cap A_{i-1}\cap\overline{A_i}$$

D'où, d'après la question précédente :

$$P(X=i)=P(A_1)\dots P(A_{i-1}|A_1\cap\dots\cap A_{i-2})P(\overline{A_i}|1_1\cap\dots\cap A_{i-1})$$

Or la probabilité de tirer une boule rouge après avoir tiré $k-1$ boules rouges est $\frac{r-(k-1)}{b+r}$ et la probabilité de tirer une blanche est $\frac{b+(k-1)}{b+r}$ d'où

$$\begin{aligned}P(X=i)&=\frac{r}{b+r}\cdots\frac{r-(i-3)}{b+r}\cdot\frac{r-(i-2)}{b+r}\cdot\frac{b+(i-1)}{b+r}\\&=\frac{1}{(b+r)^i}\cdot\frac{r!}{(r-i+1)!}\cdot(b+i-1)\end{aligned}$$

$$P(X=1)=\frac{b}{b+r}$$

et si $i\in[\![2;n]\!]$ alors

$$P(X=i)=\frac{1}{(b+r)^i}\cdot\frac{r!}{(r-i+1)!}\cdot(b+i-1).$$

ii. Vérifier que $P(X=r+1)=\dfrac{r!}{N^r}$ et que, pour tout $k\in[\![1,r]\!]$,

$$P(X=k)=\frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}}-\frac{r!}{(r-k)!N^k}.$$

Vérifions $P(X=r+1)=\dfrac{r!}{N^r}$.

En utilisant le résultat de la question précédente

$$\begin{aligned} P(X=r+1) &= \frac{1}{(b+r)^{r+1}} \cdot \frac{r!}{(r-(r+1)+1)!} \cdot (b+(r+1)-1) \\ &= \frac{1}{(b+r)^{r+1}} \cdot \frac{r!}{0!} \cdot (b+r) \end{aligned}$$

Enfin en notant $N = b + r$

$$\boxed{P(X=r+1) = \frac{r!}{N^r}.}$$

Vérifions que pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $P(X=k) = \frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k}$.

Si $k = 1$ alors

$$\begin{aligned} &\frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k} \\ &= \frac{r!}{r!N^0} - \frac{r!}{(r-1)!N^1} \\ &= 1 - \frac{r}{b+r} \\ &= \frac{b}{b+r} \\ &= P(X=1) \end{aligned}$$

Soit $k \in [\![2,r]\!]$.

$$\begin{aligned}
&\frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k}\\
&= \frac{r!N}{(r-(k-1))!N^k} - \frac{r!(r-(k-1))}{(r-(k-1))!N^k}\\
&= \frac{r!N - r!(r-(k-1))}{(r-(k-1))!N^k}\\
&= \frac{r!\left[N-(r-(k-1))\right]}{(r-(k-1))!N^k}\\
&= \frac{r!\left[N-r+k-1\right]}{(r-(k-1))!N^k}\\
&= \frac{r!\left[b+k-1\right]}{(r-(k-1))!N^k}\\
&= \frac{1}{(b+r)^k}\cdot\frac{r!}{(r-k+1)!}\cdot(b+k-1)
\end{aligned}$$

Et d'après la question précédente ceci est bien $P(X=k)$.
Nous avons donc établi

$$\boxed{k \in [\![1,r]\!],\ P(X=k) = \frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k}}$$

(e) i. Démontrer que, pour tout entier strictement positif n et tous réels $p_0, \dots, p_n$,

$$\sum_{k=1}^{n} k(p_{k-1}-p_k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k\right) - np_n.$$

Démontrons l'égalité proposée.

Si $n=1$ le résultat est trivial.
Soit $\in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $p_0, \dots, p_n$ des réels.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k(p_{k-1}-p_k)\\
&=\sum_{k=1}^{n} kp_{k-1}-kp_k\\
&=\sum_{k=1}^{n} kp_{k-1}-\sum_{k=1}^{n} kp_k\\
&=0p_0+\sum_{k=2}^{n} kp_{k-1}-\left(\sum_{k=1}^{n-1} kp_k\right)-np_n\\
&=\sum_{l=1}^{n-1}(l+1)p_l-\left(\sum_{k=1}^{n-1} kp_k\right)-np_n\\
&=-np_n+\sum_{l=1}^{n-1}(l+1)p_l-lp_l\\
&=-np_n+\sum_{l=1}^{n-1} p_l
\end{aligned}
$$

Nous avons donc établi

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall(p_0,\ldots,p_n)\in\mathbb{R}^{n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(p_{k-1}-p_k)=\left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k\right)-np_n.$$

ii. En déduire que l'espérance de X est donnée par

$$E(X)=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\frac{k!}{N^k}.$$

Déterminons $E(X)$.

$$\begin{aligned}E(X) &= (r+1)P(X=r+1) + \sum_{k=1}^{r} kP(X=k)\\ &= (r+1)\cdot\frac{r!}{N^r} + \sum_{k=1}^{r} k\left(\frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k}\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente

$$\begin{aligned}E(X) &= (r+1)\cdot\frac{r!}{N^r} + \left(\sum_{k=0}^{r-1}\frac{r!}{(r-k)!N^k}\right) - r\frac{r!}{(r-r))!N^r}\\ &= \frac{r!(r+1-r)}{N^r} + \sum_{k=0}^{r-1}\frac{r!}{(r-k)!N^k}\\ &= \sum_{k=0}^{r}\frac{r!}{(r-k)!N^k}\\ &= \sum_{k=0}^{r}\frac{r!}{(r-k)!k!}\cdot\frac{k!}{N^k}\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\frac{k!}{N^k}.}$$

2. **Seconde expérience aléatoire.** Soit n un entier strictement positif. On effectue n fois le protocole de tirage. Pour tout entier $m \in [\![1,n]\!]$, on note Y_m la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues à l'issue du m-ième tirage. Par convention Y_0 est la variable aléatoire nulle.

   (a) i. Donner la valeur de $P(Y_n = k)$ lorsque $k > n$.

   Déterminons $P(Y_n = k)$ lorsque $k > n$.

   Il est impossible d'obtenir plus de boules rouges que de tirages effectués. Donc :

$$\boxed{k > n \Rightarrow P(Y_n = k) = 0}$$

ii. Donner la valeur de $P(Y_n = k)$ lorsque $k > r$.

Déterminons $P(Y_n = k)$ lorsque $k > r$.

Les tirages de boules rouges s'effectuant sans remise il est impossible de tirer plus de boules rouges qu'il n'y en a initialement dans l'urne. Donc :

$$\boxed{k > r \Rightarrow P(Y_n = k) = 0}$$

iii. Donner la valeur de $P(Y_n = 0)$.

Déterminons $P(Y_n = 0)$.

$(Y_n = 0)$ est l'événement « à l'issue de n tirages n boules blanches ont été obtenues. En notant B_i l'événement obtenir une boule blanche au i-ième tirage nous avons donc

$$(Y_n = 0) = B_1 \cap \cdots \cap B_n$$

Les tirages de boules blanches s'effectuent avec remise et sans modification de l'expérience. Ces tirages successifs de boules blanches sont donc indépendants et la formule des probabilités composées devient dans ce cas

$$P(Y_n = 0) = P(B_1)^n$$

Autrement dit

$$\boxed{P(Y_n = 0) = \left(\frac{b}{r+b}\right)^n}$$

(b) Pour $k \in [\![0,n]\!]$ et $i \in [\![0,n-1]\!]$, exprimer la probabilité conditionnelle

$$P(Y_n = k | Y_{n-1} = i).$$

En déduire que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$P(Y_n = k) = \frac{b+k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{r+1-k}{N} P(Y_{n-1} = k-1).$$

Exprimons $P(Y_n = k | Y_{n-1} = i)$.

Soient $k \in [\![0,n]\!]$ et $i \in [\![0,n-1]\!]$.

Il est impossible d'avoir k boules rouges au tirage de rang n tirage sachant qu'il y avait i au tirage de rang $n-1$ si i est différent de k ou de $k-1$:

$$\boxed{i \notin \{k,k-1\} \Rightarrow P(Y_n = k|Y_{n-1} = i) = 0}$$

Étudions les deux cas restants.

D'une part, puisqu'aux tirages de rang n et $n-1$ il y a le même nombre de boules rouges il faut nécessairement qu'une boule blanche soit tirée et donc

$$\boxed{P(Y_n = k|Y_{n-1} = k) = P(Y_{n-1} = k) \cdot \frac{b+k}{b+r}}$$

d'autre part, puisque au tirage de rang n il y a une boule rouge de plus qu'au rang $n-1$ c'est qu'une boule rouge a été tirée et donc

$$\boxed{P(Y_n = k|Y_{n-1} = k-1) = P(Y_{n-1} = k-1) \cdot \frac{r-(k-1)}{b+r}}$$

Exprimons $P(Y_n = k)$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

Il est impossible de tirer simultanément une boule rouge et une boule blanche donc

$$(Y_n = k|Y_{n-1} = k) \cap (Y_n = k|Y_{n-1} = k-1) = \emptyset$$

les événements sont disjoints.
Autrement dit, puisqu'il n'y a pas d'autre alternative que rouge ou blanc

$$(Y_n = k|Y_{n-1} = k) \sqcup (Y_n = k|Y_{n-1} = k-1) = (Y_n = k)$$

D'où

$$P(Y_n = k|Y_{n-1} = k) + (Y_n = k|Y_{n-1} = k-1) = P(Y_n = k)$$

et ce quel que soit $k \in [\![1,n]\!]$.
Autrement dit, en tenant compte de ce qui a déjà été démontré dans cette question,

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\quad P(Y_n = k) = P(Y_{n-1} = k-1) \cdot \frac{r-(k-1)}{b+r} + P(Y_{n-1} = k) \cdot \frac{b+k}{b+r}.$$

(c) En déduire que pour tout entier n strictement positif,

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r + k(N-1)}{N} P(Y_{n-1} = k) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(Y_{n-1}) + \frac{r}{N}.$$

Exprimons l'espérance telle que demandée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question B.2.(a)

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} kP(Y_n = k)$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= \sum_{k=1}^{n} k \left[P(Y_{n-1} = k-1) \cdot \frac{r-(k-1)}{b+r} + P(Y_{n-1} = k) \cdot \frac{b+k}{b+r}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(Y_{n-1} = k-1) \cdot \frac{r-k+1}{N} + \sum_{k=1}^{n} kP(Y_{n-1} = k) \cdot \frac{b+k}{N} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(Y_{n-1} = k) \cdot \frac{r-k}{N} + \sum_{k=1}^{n} kP(Y_{n-1} = k) \cdot \frac{b+k}{N} \\
&= P(Y_{n-1} = 0) \cdot \frac{r}{N} + nP(Y_{n-1} = n) \cdot \frac{b+n}{N} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \left[(k+1) \cdot \frac{r-k}{N} + k \cdot \frac{b+k}{N}\right] P(Y_{n-1} = k)
\end{aligned}$$

Or, d'après la question B.2.(a), $P(Y_{n-1} = n) = 0$, donc

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= \frac{r}{N} P(Y_{n-1} = 0) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n-1} \left[(k+1)(r-k) + k(b+k)\right] P(Y_{n-1} = k) \\
&= \frac{r}{N} P(Y_{n-1} = 0) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n-1} \left[r + k(r-1+b)\right] P(Y_{n-1} = k) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \left[r + k(r-1+b)\right] P(Y_{n-1} = k)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(Y_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r + k(N-1)}{N} P(Y_{n-1} = k)$$

Démontrons la seconde expression proposée pour $E(Y_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
E(Y_n) \sum_{k=0}^{n-1} & \frac{r + k(N-1)}{N} P(Y_{n-1} = k) \\
&= \frac{r}{N} \left[\sum_{k=0}^{n-1} P(Y_{n-1} = k)\right] + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{k=0}^{n-1} k P(Y_{n-1} = k)
\end{aligned}$$

Puisque $(P(Y_{n-1} = k))_{1 \leq k \leq n-1}$ est une distribution de probabilité

$$E(Y_n) = \frac{r}{N} \cdot 1 + \frac{N-1}{N} E(Y_{n-1})$$

Enfin

quelque soit $n \in \mathbb{N}*$,

$$E(Y_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(Y_{n-1}) + \frac{r}{N}.$$

(d) i. Vérifier que pour tout entier naturel n,

$$E(Y_n) = r\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: « $E(Y_n) = r\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right]$ ».

Nous pourrions commencer la récurrence pour $n = 0$, puisque Y_n est défini dans l'énoncé.

Démontrons que $P(1)$ est vraie.
De façon claire, lors du premier tirage il possible d'obtenir 1 boule rouge avec une probabilité de $\frac{r}{N}$ ou 0 boule rouge avec une probabilité de $1 - \frac{r}{N}$.
Donc

$$E(Y_1) = \frac{r}{N}1 + \left(1 - \frac{r}{N}\right).0 = \frac{r}{n} = r\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right]$$

Ainsi $P(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $P(n+1)$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence : $E(Y_n) = r\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$.
Donc en utilisant la formule de récurrence établie à la question précédente

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}) &= \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(Y_n) + \frac{r}{N} \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) r\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] + \frac{r}{N} \\ &= r\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

Nous avons donc établi par récurrence sur n que

quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{E(Y_n) = r\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]}$$

ii. Étudier la convergence de la suite $(E(Y_n))_{n\geq 0}$ et montrer l'existence d'un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$|E(Y_n) - r| \leq \frac{1}{4}.$$

Étudions la convergence de $(E(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

$0 < 1 - \frac{1}{N} < 1$ donc la suite géométrique $\left(\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
D'où

$$\boxed{(E(Y_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } r.}$$

Donc, d'après la définition de Weierstrass de la convergence d'une suite,

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N},\ |E(Y_n) - r| \leq \tfrac{1}{4}.}$$

3. (a) Pour tout entier strictement positif k, on note A_k l'événement la $k-$ième boule tirée est rouge ». En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que

$$P(A_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{r-i}{N} P(Y_k = i).$$

Déterminons $P(A_{k+1})$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
A_{k+1} désignant le fait de tirer une boule rouge au $k+1$-ième tirage et Y_k désignant le nombre de boules rouges tirées à la suite de k tirages, nous déduisons

$$A_{k+1} \subset \bigsqcup_{i=1}^{k} (Y_k = 1)$$

Donc, d'après la formule des probabilités totales

$$P(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} P(A_{k+1}|Y_k = i)P(Y_k = i)$$

Si i boules rouges ont été tirées au bout de k tirages il en reste $r-i$ parmi les N de l'urne, donc

$$P(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{r-i}{N} P(Y_k = i)$$

Ainsi

quelque soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{r-i}{N} P(Y_k = i)$$

(b) Exprimer $P(A_{k+1})$ en fonction de $E(Y_k)$ et en déduire une expression de $P(A_{k+1})$ en fonction r, k et N.

Exprimons $P(A_{k+1})$ en fonction de $E(Y_k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question précédente

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= \frac{1}{N}\left[r\left(\sum_{i=1}^{n} P(Y_k = i)\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} iP(Y_k = i)\right)\right] \\ &= \frac{1}{N}\left[r - E(Y_k)\right] \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(A_{k+1}) = \frac{r - E(Y_k)}{N}$$

Exprimons $P(A_{k+1})$ en fonction de r, k et N.

D'après la question B.2.(d).(i)

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= \frac{r - r\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k\right]}{N} \\ &= \frac{r}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^k \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(A_{k+1}) = \frac{r}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^k.$$

4. (a) En utilisant la question **B**2(b) et le théorème du transfert, montrer que, pour tout entier n strictement positif,

$$E(Y_n(Y_n-1)) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k(k-1)(N-2)+2(r-1)k}{N}\right)P(Y_{n-1}=k).$$

Déterminons $E(Y_n(Y_n-1))$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $f : x \mapsto x(x-1)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. D'après le théorème du transfert

$$E\left(f(Y_n)\right) = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} P(Y_n = k) f(k)$$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \sum_{k \in [\![1,n]\!]} P(Y_n) k(k-1)$$

D'après la question B2(b)

$$E\left(f(Y_n)\right) = \sum_{k\in[\![1,n]\!]} \left[\frac{b+r}{N}P(Y_{n-1}=k) + \frac{r+1-k}{N}P(Y_{n-1}=k-1)\right]k(k-1)$$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k\in[\![1,n]\!]}(b+k)P(Y_{n-1}=k)k(k-1)\right.$$
$$\left. + \sum_{k\in[\![1,n]\!]}(r+1-k)P(Y_{n-1}=k-1)k(k-1)\right]$$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \frac{(b+n)}{N}P(Y_{n-1}=n)n(n-1)$$
$$+\frac{1}{N}\left[\sum_{k\in[\![1,n-1]\!]}(b+k)P(Y_{n-1}=k)k(k-1)\right.$$
$$\left. + \sum_{l\in[\![1,n-1]\!]}(r-l)P(Y_{n-1}=l)(l+1)l\right]$$
$$+\frac{(r+1-n)}{N}P(Y_{n-1}=n)n(n-1)$$

Puisque $P(Y_{n-1}=n)=0$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \frac{1}{N}\sum_{k\in[\![1,n-1]\!]} k\left[(b+k)(k-1)+(r-k)(k+1)\right]P(Y_{n-1}=k)$$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \frac{1}{N}\sum_{k\in[\![1,n-1]\!]} k\left[(b+k+r-k)(k-1)+2(r-k)\right]P(Y_{n-1}=k)$$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \frac{1}{N}\sum_{k\in[\![1,n-1]\!]} k\left[N(k-1)+2(r-k)\right]P(Y_{n-1}=k)$$

$$E\left(f(Y_n)\right) = \frac{1}{N}\sum_{k\in[\![1,n-1]\!]} k\left[(N-2)(k-1)+2(k-1)+2(r-k)\right]P(Y_{n-1}=k)$$

Quelque soit $n\in\mathbb{N}^*$, $E\left(Y_n(Y_n-1)\right)$ vaut

$$\sum_{k\in[\![1,n-1]\!]}\frac{k(k-1)(N-2)+2(r-1)k}{N}P(Y_{n-1}=k)$$

(b) En déduire que, pour tout entier n strictement positif,

$$E(Y_n(Y_n-1)) = \left(1-\frac{2}{N}\right)E(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1))+\frac{2r(r-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right)$$

Nous allons utiliser le résultat de la question précédente, le théorème du transfert, la définition de l'espérance et une expression de $E(Y_n)$ trouvée à une question précédente.

Démontrons l'expression proposée pour $E(Y_n(Y_n-1))$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente

$$\begin{aligned}E(Y_n(Y_n-1) &= \frac{N-2}{N}\sum_{1\leq k\leq n-1} k(k-1)P(Y_{n-1}=k)\\ &\quad+\frac{2(r-1)}{N}\sum_{1\leq k\leq n-1} kP(Y_{n-1}=k)\end{aligned}$$

D'après le théorème du transfert

$$\begin{aligned}E(Y_n(Y_n-1) &= \frac{N-2}{N}\sum_{1\leq k\leq n-1} k(k-1)P(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1)=k)\\ &\quad+\frac{2(r-1)}{N}\sum_{1\leq k\leq n-1} kP(Y_{n-1}=k)\\ E(Y_n(Y_n-1) &= \frac{N-2}{N}E\left(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1)\right)+\frac{2(r-1)}{N}E(Y_{n-1})\end{aligned}$$

D'après la question B.2.(d).i.

$$\begin{aligned}E(Y_n(Y_n-1) &= \frac{N-2}{N}E\left(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1)\right)\\ &\quad+\frac{2(r-1)}{N}r\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right)\end{aligned}$$

Pour tout entier n strictement positif, $E(Y_n(Y_n-1))$ égale
$$\left(1-\frac{2}{N}\right)E(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1))+\frac{2r(r-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right).$$

(c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$E(Y_n(Y_n-1))=r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right).$$

Initialisation au rang 0 sans difficulté.
Hérédité avec la formule de récurrence de la question précédente, l'hypothèse de récurrence et un peu de bidouille calculatoire.

Démontrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$:
$$P(n):\ E(Y_n(Y_n-1))=r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)\text{''}.$$

$E(Y_0(Y_0-1))=0P(Y_0=0)=0$.
$r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^0-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^0\right)=0$.
Donc $P(0)$ est vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}$.
Supposons $P(n)$ vraie et démontrons qu'alors $P(n+1)$ l'est aussi.
D'après la question précédente

$$\begin{aligned}&E(Y_{n+1}(Y_{n+1}-1))\\&\quad=\left(1-\frac{2}{N}\right)E(Y_n(Y_n-1))+\frac{2r(r-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)\end{aligned}$$

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}&E(Y_{n+1}(Y_{n+1}-1))\\&\quad=\left(1-\frac{2}{N}\right)r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)\\&\quad+\frac{2r(r-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&E(Y_{n+1}(Y_{n+1}-1))\\
&=r(r-1)\left[\left(1-\frac{2}{N}\right)+\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n\right.\\
&\quad\left.-2\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)^n+\frac{2}{N}-\frac{2}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]\\
&=r(r-1)\left[1-\frac{2}{N}+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1}\right.\\
&\quad\left.-2\left[\left(1-\frac{2}{N}\right)+\frac{1}{N}\right]\left(1-\frac{1}{N}\right)^n+\frac{2}{N}\right]\\
&=r(r-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1}-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que

$$\boxed{E(Y_n(Y_n-1))=r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)}$$

(d) Exprimer $V(Y_n)$ en fonction de $E(Y_n(Y_n-1))$ et de $E(Y_n)$.

Nous allons utiliser la formule Huygens et de la linéarité de l'espérance.

Exprimons $V(Y_n)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

D'après la formule de Huygens

$$\begin{aligned}
V(Y_n)&=E(Y_n^2)-E(Y_n)^2\\
&=E(Y_n(Y_n-1)+Y_n)-E(Y_n)^2
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance

$$V(Y_n)=E(Y_n(Y_n-1))+E(Y_n)-E(Y_n)^2$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ V(Y_n)=E(Y_n(Y_n-1))+E(Y_n)-E(Y_n)^2}$$

(e) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$V(Y_n) = r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n + r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}.$$

Il s'agit d'utiliser la formule de la question précédente et les formules de $E(Y_n)$ trouvée à la question et B.2.(d).i et de $E(Y_n(Y_n-1))$ trouvée à la question B.4.(c).

Démontrons la formule proposée pour $V(Y_n)$.

D'après la question précédente

$$V(Y_n) = E(Y_n(Y_n-1)) + E(Y_n) - E(Y_n)^2$$

D'après les questions B.2.(d).i et B.4.(c)

$$\begin{aligned}V(Y_n) = r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right) + r\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)\\ - r^2\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)^2\end{aligned}$$

En développant

$$\begin{aligned}V(Y_n) &= r(r-1) + r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2r(r-1)\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\\ &\quad + r - r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2 + 2r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}\\ V(Y_n) &= r^2 - r + r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n + 2r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\\ &\quad + r - r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2 + 2r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}\end{aligned}$$

Ce qui se simplifie en

$$V(Y_n) = r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n + r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}$$

Nous avons donc démontré que

$$\text{quelque soit } n \in \mathbb{N}^*,\quad V(Y_n) = r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n + r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}.$$

5. (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V(Y_n)$.

Il suffit d'utiliser la formule trouvée à la question précédente.

Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} V(Y_n)$.

D'après la question précédente $(V(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire de suites géométriques dont les raisons sont toutes dans $[0{,}1[$.
Donc

$$\lim_{n\to+\infty} V(Y_n) = 0.$$

(b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout réel α strictement positif,

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha) = 0.$$

Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis par encadrement de suites et d'après la question précédente concluons.

Démontrons la convergence proposée.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Y_n est une variable aléatoire réelle, donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$0 \leq P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha) \leq \frac{V(Y_n)}{\alpha^2}$$

Puisque $V(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, par encadrement de la limite de la suite nous concluons

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha) = 0.$$

(c) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha) = 0.$$

Il faut utiliser la limite trouvée à la question précédente en utilisant à nouveau la comparaison de suite. Pour obtenir la comparaison avec la suite de la question précédente il faudra utiliser la croissance de la probabilité.

Démontrons que $(P(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Quelque soient x et y réels : $|x| - |y| \leq |x - y|$.
Donc quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \leq |Y_n - E(Y_n)|$$

Donc si :

$$|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha,$$

alors

$$|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha.$$

Autrement dit

$$\{|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha\} \subseteq \{|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha\}$$

Du fait de la croissance et de la positivité de la fonction probabilité

$$0 \leq P\left(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha\right) \leq P\left(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha\right)$$

Puisque $P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, par encadrement de la limite de la suite nous concluons

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha) = 0.}$$

(d) On rappelle que n_0 est introduit dans la question **B**2(d)ii. On fixe $\alpha = \frac{1}{2}$.
Montrer que si $n \geq n_0$, alors :

$$P(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha) = P(Y_n \neq r).$$

La démarche est détaillée par l'énoncé. Nous allons montrer que les ensembles des événements sont égaux.

Montrons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow P(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha) = P(Y_n \neq r).$$

Soit $n \geq n_0$.

i. $\subseteq$
   D'où, α étant supposé égale à $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & |Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha \\ & \Leftrightarrow |Y_n - r| \geq \frac{1}{2} + |r - E(Y_n)| \\ & \Rightarrow |Y_n - r| \geq \frac{1}{2} \\ & \Rightarrow Y_n \neq r \end{aligned}$$

   Nous en déduisons

$$\{|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha\} \subseteq \{Y_n \neq r\}$$

ii. $\supseteq$
   D'après la question B.2.(d).ii, et par construction de n_0,

$$|r - E(Y_n)| \leq \frac{1}{4}$$

   D'autre part si $Y_n \neq r$ alors, Y_n étant un entier,

$$|Y_n - r| \geq 1.$$

   Donc, puisque $|E(Y_n) - r| \leq \frac{1}{4}$,

$$|Y_n - r| - |E(Y_n) - r| \geq 1 - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$$

   d'où

$$\{Y_n \neq r\} \subseteq \{|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha\}$$

Finalement

$$P\left(Y_n \neq r\right) = P\left(|Y_n - r| - |r - E(Y_n)| \geq \alpha\right)$$

(e) Conclure.

Montrons que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi.

D'après les deux questions précédentes

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \neq r) = 0$$

Autrement dit

$$\forall\varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - r| \geq \varepsilon) = 0$$

Finalement

$$\boxed{(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge en probabilité vers } r.}$$

Ainsi les boules rouges sont toutes tirées.