Capes externe de mathématique épreuve 1.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

I Problème 1.

Les parties **D** et **E** de ce problème sont indépendantes des parties **B** et **C**.

Notation

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m,n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leq k \leq n$.

Soit I un intervalle d $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur I, n fois dérivables et dont la dérivée n-ième est continue.

Pour n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égale à n.

Partie A : interpolation de Lagrange.

Soit n un entier supérieur ou égale à 2 et soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Montrer que L_k est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,
$$P(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$

2. On considère l'application
$$F : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_1, \ldots, P(a_n)) \end{cases}$$

   (a) Montrer que F est une application linéaire.

(b) Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

(c) Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1,n]\!], P(a_k) = f(a_k)$. Ce polynôme P est appelé *polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses* $a_1,\ldots,a_n$.

(b) Exprimer le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1,\ldots,a_n$ à l'aide des polynômes $L_1,\ldots,L_n$ et des valeurs de f en $a_1,\ldots,a_n$.

Partie B : erreur d'interpolation.

Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel supérieur ou égale à 2. Soit f une fonction dans $\mathcal{C}^n([a,b])$ et $a_1 < \cdots < a_n$ des nombres réels appartenant à $[a,b]$. On note P le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1,\ldots,a_n$ (on rappelle que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$). Le but de cette partie est de majorer la valeur absolue de la différence entre f et P sur le segment $[a,b]$.

1. Soit g une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) **Question de cours.** Énoncer le théorème de Rolle.

(b) On suppose que g est n fois dérivable sur $[a,b]$ et s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[a,b]$. Montrer que la fonction dérivée n-ième $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a,b]$.

2. On fixe $c \in [a,b]$, distinct de $a_1,\ldots,a_n$. On définie la fonction g_c sur $[a,b]$ par

$$g_c(x) = f(x) - P(x) + (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}$$

(a) Montrer que g_c s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[a,b]$.

(b) Montrer que g_c est n fois dérivable sur $[a,b]$ puis que $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a,b]$.

(c) Soit h_c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_c(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x-a_k}{c-a_k}$.
En remarquant que h_c est une fonction polynôme de degré n, donner une expression de $h_c^{(n)}$, puis de $g_c^{(n)}$.

3. (a) Déduire des questions précédentes qu'il existe un réel $\zeta \in [a,b]$ tel que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c - a_k)$$

(b) Montrer que le résultat établi dans la question **B**.3.(a) reste vraie si c est égal à l'un des a_k.

(c) En déduire que

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x\in[a,b]} \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|$$

Partie C : un exemple.

Dans cette partie, on interpole de deux manières différentes la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right.$$

1. **Première méthode**. On considère le polynôme d'interpolation P de f en les points d'abscisses 0, $\frac{\pi}{2}$, π.

(a) Calculer P.

(b) En utilisant les résultats de la partie **B**, montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \max_{x\in[0,\pi]} \frac{\left|x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)\right|}{6}$$

(c) En déduire que pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}$$

2. **Seconde méthode.** On choisit un entier $n \geq 1$.
Pour tout $k \in [\![0,n-1[\![$, on note P_k le polynôme (de degré inférieur ou égale à 1) d'interpolation de f aux points d'abscisses $\frac{k\pi}{n}$ et $\frac{(k+1)\pi}{n}$. On note Q_n la fonction affine par morceaux définie par :

$$Q_n(x) = \begin{cases} P_0(x) \text{ si } 0 \leq x < \dfrac{\pi}{n}, \\ P_1(x) \text{ si } \dfrac{\pi}{n} \leq x < \dfrac{2\pi}{n}, \\ \vdots \\ P_k(x) \text{ si } \dfrac{k\pi}{n} \leq x < \dfrac{(k+1)\pi}{n} \quad (k \in [\![0,n-2]\!]), \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \text{ si } \dfrac{(n-1)\pi}{n} \leq x < \pi \end{cases}$$

   (a) Calculer Q_1 et Q_2. Tracer la courbe représentative de Q_2.

   (b) Justifier que Q_n est continue sur $[0,\pi]$.

   (c) Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{k\pi}{n},\frac{(k+1)\pi}{n}\right]$,

$$\left|\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right| \leq \frac{\pi^2}{4n^2}$$

   (d) Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

3. Parmi ces deux méthodes d'approximation, quelle est la meilleure ? Justifier la réponse.

Partie D : déterminant de Vandermonde.

On considère la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égale à 2 et $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels.

On cherche à déterminer par deux méthodes différentes une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que A soit inversible.

1. Calculer le déterminant de A lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

2. **Première méthode**.

   (a) Montrer que A est la matrice de l'application linéaire F définie dans la question **A**.2 dans des bases bien choisies.

   (b) En déduire que si les a_k sont deux à deux distincts A est inversible.

   (c) Qu'en est-il si deux des a_k sont égaux ?

   (d) Conclure.

3. **Seconde méthode**. On considère le polynôme

$$P(X) = (X - a_1) \ldots (X - a_{n-1}).$$

   (a) Montrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-2}$ tels que

$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2} X^{n-2} + \cdots + \lambda_1 X + \lambda_0.$$

   (b) On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Montrer que

$$C_n + \lambda_{n-2} C_{n-1} + \cdots + \lambda_0 C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}$$

   (c) En déduire que

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

   (d) Conclure.

Partie E : application à la recherche de paraboles.

On fixe trois points distincts A_1, A_2, A_3 du plan affine euclidien. On recherche toutes les paraboles de ce plan passant par A_1, A_2 et A_3.

1. Dans cette question, on impose en plus aux paraboles recherchées d'avoir un axe parallèle à une droite D donnée. On choisit un repère orthonormé du plan tel que D ait pour équation $x = 0$. Par définition , les paraboles d'axes parallèles à D sont les les courbes d'équation

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

avec $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Les coordonnées du point A_i dans ce repère sont notées (a_i,b_i) pour $1 \leq i \leq 3$.

   (a) Montrer que la recherche des paraboles d'axe parallèle à D et passant par les points A_1, A_2 et A_3 est équivalente à la recherche des solutions (γ,β,α), avec $\alpha \neq 0$, du système :

$$(S) : \begin{cases} \gamma + a_1\beta + a_1^2\alpha = b_1, \\ \gamma + a_2\beta + a_2^2\alpha = b_2, \\ \gamma + a_3\beta + a_3^2\alpha = b_3. \end{cases}$$

   (b) Montrer que si deux points A_i ont la même abscisse (S) n'a aucune solution.

   (c) On suppose que les abscisses des points A_i sont deux à deux distinctes.

      i. Montrer que le système (S) possède une unique solution (γ,β,α).

      ii. Exprimer α sous forme d'un quotient de déterminants.

      iii. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

         (i) $\alpha = 0$,

         (ii) $\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0$

         (iii) A_1, A_2 et A_3 sont alignés.