# Capes externe de mathématique épreuve 1.

## I Problème 1.

### Partie A : interpolation de Lagrange.

1. Il est clair que $L_k$ vérifie bien la propriété proposée.
   Montrons qu'il est unique.

   Considérons
   $$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_1, \dots, P(a_n)) \end{array} \right.$$

   $\varphi$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire entre des espaces vectoriels de même dimension. Pour que $\varphi$ soit un isomorphisme il faut et il suffit donc que $\varphi$ soit injective c'est-à-dire que $\ker(\varphi) = \{0\}$.

   Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Si $\varphi(P) = 0$, alors $P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$. Ainsi $P$ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$ qui admet $n$ racines distinctes. Donc $P = 0$, et $\varphi$ est injective.

   Puisque $\varphi$ est un isomorphisme il existe un unique polynôme $P$ tel que $i \in [\![1,n]\!]$,
   $$P(a_i) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{array} \right.$$

2. (a) $(\mathbb{R}_{n-1}[X], +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

   $F$ est linéaire puisque : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^2$,
   $$F(\lambda P + Q) = \lambda (P(a_1), \dots, P(a_n)) + (Q(a_1), \dots, Q(a_n))$$

   (b) Nous remarquons, d'après la question **A**.1, que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $F(L_k) = e_k$.

   Ce qui établit l'existence du polynôme $P$.

   (c) Montrons que $F$ est surjective.
   Soit $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
   Avec les notations de la question précédente : $y = \sum_{1 \leq k \leq n} y_k e_k$.
   D'après notre remarque à la question précédente : $y = \sum_{1 \leq k \leq n} y_k F(L_k)$.
   Puisque $F$ est $\mathbb{R}$-linéaire : $y = P\left(\sum_{1 \leq k \leq n} y_k L_k\right)$.
   Comme $\sum_{1 \leq k \leq n} y_k L_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, nous avons bien établi que $F$ est surjective.

$F$ est une application linéaire surjective entre deux espaces vectoriels de même dimension donc c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. (a) $P$ est l'unique antécédent de $(f(a_1),\dots,f(a_n))$ par la bijection $F$.

   (b) On vérifie aisément que si

$$P = \sum_{1\leq k\leq n} f(a_k)L_k$$

alors

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(a_k) = f(a_k)$$

**Partie B : erreur d'interpolation.**

1. (a) Soient $a < b$ des réels, $f$ une fonction définie sur $[a,b]$.
   Si : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b], \\ f \text{ est dérivable sur } ]a,b[, \\ \text{et } f(a) = f(b) \end{cases}$
   alors : $\exists c \in ]a,b[,\ f'(c) = 0$.

   (b) Puisque $n \geq 2$ on peut noter pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P_k$ :« $g^{(k)}$ s'annule en $n+1-k$ points distincts de $[a,b]$ ».

   Montrons par récurrence sur $k$ que $P_k$ est vraie pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

   $P_0$ est vrai par hypothèse.

   Soit $k \in [\![0,n-1[\![$. Supposons $P_k$ vraie est démontrons qu'alors $P_{k+1}$ l'est aussi.
   $g^{(k)}$ s'annule en $n+1-k$ points distincts de $[a,b]$ que nous noterons $\beta_1 < \cdots < \beta_{n+1-k}$.
   Soit $h \in [\![0,n+1-k-1[\![$.
   $g^{(k)}$ qui est définie sur $[\beta_h,\beta_{h+1}]$ vérifie bien les hypothèses du théorème de Rolle :
   — $g^{(k)}$ est continue sur $[\beta_h,\beta_{h+1}]$,
   — $g^{(k)}$ est dérivable sur $]\beta_h,\beta_{h+1}[$,
   — et $g^{(k)}(\beta_h) = g^{(k)}(\beta_{h+1}) = 0$.
   donc il existe $c_h \in ]\beta_h,\beta_{h+1}[$ tel que $g^{(k+1)}(c_h) = 0$.
   Ainsi $g^{(k+1)}$ s'annule en au moins $n-k$ valeurs (nombre d'intervalles $[\beta_h,\beta_{h+1}]$). Autrement dit $P_{k+1}$ est vraie.

   Nous avons donc démontré par récurrence que $g^{(k)}$ s'annule en au moins $n+1-k$ points.
   En particulier $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point.

2. (a) On vérifie immédiatement que $g_c(a_1) = \cdots = g_c(a_n) = g_c(c) = 0$.
Les valeurs $a_1,\ldots,a_n,c$ sont bien distinctes.

(b) $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ et $x \mapsto -P(x) + (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^n \frac{x-a_k}{c-a_k}$ est polynomiale donc indéfiniment dérivable.
Donc $g_c \in \mathcal{C}^n([a,b])$.

D'après la question **B**.1.(b) $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a,b]$.

(c) $h_c$ est une fonction polynomiale de degré $n$ et de coefficient dominant $\prod_{k=1}^n \frac{1}{c-a_k}$.
Par une récurrence immédiate : $h_c^{(n)}(x) = \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{c-a_k}\right) n!$.

Comme $g_c(x) = f(x) - P(x) - (f(c) - P(c))h_c(x)$, que la dérivation est linéaire, que $P$ est de degré au plus $n-1$ : $g_c^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - (f(c) - P(c))\, h_c^{(n)}(x)$.
Et donc : $g_c^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n!\,(f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^n \frac{1}{c-a_k}$.

3. (a) D'après la question **B**.2, il existe $\zeta \in [a,b]$ tel que $g_c(\zeta) = 0$. Autrement dit : $f^{(n)}(x) - n!\,(f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^n \frac{1}{c-a_k} = 0$ et donc

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^n (c - a_k)$$

(b) $P$ est le polynôme d'interpolation de $f$ en les points d'abscisses $a_1,\ldots,a_n$ donc :
$[\exists k \in [\![1,n]\!],\ c = a_k] \Rightarrow \left[f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^n (c-a_k) = 0\right]$

(c) Soit $c \in [a,b]$.
D'après la question précédente

$$\exists \zeta \in [a,b],\ f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^n (c - a_k)$$

Or

$$\left|\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}\right| \leq \max_{\zeta \in [a,b]} \left|\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}\right| = \frac{1}{n!} \max_{x \in [a,b]} \left|f^{(n)}(x)\right|$$

et

$$\left|\prod_{k=1}^n (c - a_k)\right| \leq \max_{c \in [a,b]} \left|\prod_{k=1}^n (c - a_k)\right| = \max_{x \in [a,b]} |x - a_k|$$

donc

$$|f(c)-P(c)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x\in[a,b]} \prod_{k=1}^{n} |x-a_k|$$

Et enfin :

$$\max_{c\in[a,b]} |f(c)-P(c)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x\in[a,b]} \prod_{k=1}^{n} |x-a_k|$$

**Partie C : un exemple.**

1. (a) D'après **A**.3.(b)

$$P = \sum_{1\leq k\leq n} f(a_k)L_k$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X) &= \sin(0)\cdot L_1(X) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) L_2(X) + \sin(\pi) L_3(X) \\ &= \frac{X-0}{\frac{\pi}{2}-0}\cdot\frac{X-\pi}{\frac{\pi}{2}-\pi} \\ &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 X(X-\pi) \end{aligned}$$

(b) Pour $x\in[0,\pi]$, $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$.
Donc

$$\frac{1}{n!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x\in[a,b]} \prod_{k=1}^{n} |x-a_k|$$

est successivement égal à

$$\frac{1}{6} \max_{x\in[0,\pi]} |-\cos(x)| \times \max_{x\in[0,\pi]} \left|x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)\right|$$
$$\frac{1}{6} \max_{x\in[0,\pi]} \left|x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)\right|$$

D'après **B**.3.(c)

$$\forall x\in[0,\pi],\ |f(x)-P(x)| \leq \max_{x\in[0,\pi]} \frac{\left|x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)\right|}{6}$$

(c) Étudions les variation de $r : x \mapsto x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)$ sur $[0,\pi]$.

En développant

$$r(x) = x^3 - \frac{3\pi}{2}x^2 + \frac{\pi^2}{2}$$

En dérivant :

$$r'(x) = 3x^2 - 3\pi x + \frac{\pi^2}{2}$$

Recherchons les racines de ce trinôme Comme $\Delta = b^2 - 4ac = 9\pi^2 - 6\pi^2 = 3\pi^2$ il admet eux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{3\pi - \sqrt{3\pi^2}}{2\times 3} = \frac{\pi}{6}(3-\sqrt{3})$ et $x_2 = \frac{\pi}{6}(3+\sqrt{3})$.
D'où le tableau de variation de $r$ :

| $x$ | $0$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $r(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $r(x_1)$ | $\searrow$ | $r(x_2)$ | $\nearrow$ | $\pi$ |

Or :

$$\begin{aligned} r(x_1) &= \frac{\pi}{6}(3-\sqrt{3})\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right) \\ &= \frac{\pi^3}{6^3}\sqrt{3}(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3}) \\ &= \frac{\pi^3\sqrt{3}}{6^2} \end{aligned}$$

et, de même :

$$r(x_2) = -\frac{\pi^3\sqrt{3}}{6^2}$$

Nous en déduisons l'encadrement : $0 \leq |\frac{r(x)}{6}| \leq \frac{\pi^3\sqrt{3}}{6^3}$.
Enfin

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}$$

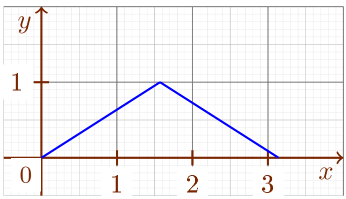
2. (a) $Q_1(X) = P_0(X) = \sin(0)L_1 + \sin(\pi)L_2(X) = 0$

Si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, alors

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= P_0(x) \\ &= \sin(0)L_1(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)L_2(x) \\ &= L_2(x) \\ &= \frac{x-0}{\frac{\pi}{2}-0} \\ &= \frac{2}{\pi}x \end{aligned}$$

Si $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$, alors

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= P_1(x) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)L_1(x) + \sin(\pi)L_2(x) \\ &= L_1(x) \\ &= \frac{x-\pi}{\frac{\pi}{2}-\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi}(x-\pi) \end{aligned}$$




(b) Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $P_k$ est une fonction affine donc continue sur $\left[\frac{k\pi}{n},\frac{(k+1)\pi}{n}\right[$.
De plus si $k \in [\![0,n-2]\!]$, alors

$$P_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{x-\frac{(k+1)\pi}{n}}{\frac{k\pi}{n}-\frac{(k+1)\pi}{n}} + \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)\frac{x-\frac{k\pi}{n}}{\frac{(k+1)\pi}{n}-\frac{k\pi}{n}}$$

$$P_k(x) = -\frac{n}{\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\left(x-\frac{(k+1)\pi}{n}\right) + \frac{n}{\pi}\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)\cdot\left(x-\frac{k\pi}{n}\right)$$

En particulier :

$$P_k\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

Or de même

$$P_{k+1}(x) = -\frac{n}{\pi}\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)\cdot\left(x-\frac{(k+2)\pi}{n}\right)+\frac{n}{\pi}\sin\left(\frac{(k+2)\pi}{n}\right)\cdot\left(x-\frac{k\pi}{n}\right)$$

et donc

$$P_{k+1}\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

Ainsi $Q_n$ est continue sur $[0,\pi[$ et il est clair que $P_{n-1}$ est prolongeable par continuité en $\pi$ en prenant la valeur 0.

(c) La fonction $t : x \mapsto \left(x-\frac{k\pi}{n}\right)\left(x-\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$ est polynomiale de degré 2.

Son extremum est atteint en $\frac{\frac{k\pi}{n}+\frac{(k+1)\pi}{n}}{2} = \frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}$.
Le coefficient dominant de $t$ étant positif nous en déduisons son tableau de variation :

| $x$ | $\frac{k\pi}{n}$ | | $\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}$ | | $\frac{(k+1)\pi}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2$ | $\nearrow$ | $0$ |

(d) Soit $x \in [0,\pi]$.
$\exists k \in [\![0,n-1]\!], |f(x)-Q_n(x)| = |f(x)-P_k(x)-.$
$P_k$ étant le polynôme d'interpolation de $f$ en les points $\frac{k\pi}{n}$ et $\frac{(k+1)\pi}{n}$ donc, d'après la question **B**.3.(c) :

$$|f(x)-P_k(x)| \leq \frac{1}{2!}\max_{x\in[0,\pi]}|f^{(2)}(x)|\times\max_{x\in[0,\pi]}\left|\left(x-\frac{k\pi}{n}\right)\left(x-\frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right|$$

Et d'après la question précédente

$$|f(x)-P_k(x)| \leq \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\pi^2}{4n^2}$$

3. $\frac{\pi^2}{8n^2} > 0$, $\frac{\pi^3\sqrt{3}}{216} > 0$ et $\dfrac{\frac{\pi^2}{8n^2}}{\frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}} = \dfrac{27}{\pi\sqrt{3}} > 1$.

   Donc $\frac{\pi^2}{8n^2} > \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}$.

   La première méthode est la meilleure.

**Partie D : déterminant de Vandermonde.**

1. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot a_2 - 1 \cdot a_1 = a_2 - a_1$.

   et

   $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = a_2a_3^2 + a_1a_2^2 + a_1^2a_3 - a_2a_1^2 - a_2^2a_3 - a_1a_3^2$

2. (a) $A$ est la matrice de $F$ dans les bases canoniques des espaces $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$.

   $F(X^h) = (a_1^h, \dots, a_n^h) = \sum_{i=1}^n a_i^h \cdot e_i$

   Autrement dit

   $$\mathrm{Mat}_{(1,X,\dots,X^{n-1}),(e_1,\dots,e_n)}(F) = A$$

   (b) Nous avons établi dans la partie **A** que si les $a_k$ sont distincts $F$, et donc $A$, est inversible.

   (c) Supposons par exemple que $a_1 = a_2$, alors $F(P) = 0$ lorsque $P(X) = (X - a_2)\dots(X - a_n)$ et pourtant $P \neq 0$ donc $F$ n'est pas injective et *a fortiori* pas bijective.

   Si deux des $a_k$ sont égaux alors $A$ n'est pas inversible.

   (d) Nous avons démontré avec les questions **D**.2.(b) et **D**.2.(c) nous avons démontré par conditions nécessaire et suffisante que $A$ est inversible si et seulement si les $a_k$ sont deux à deux distincts.

3. (a) En développant l'expression factorisée de $P$ nous voyons que son monôme dominant est $X^{n-1}$ donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et : $\exists(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2}X^{n-2} + \dots + \lambda_1 X + \lambda_0$.

   (b) Clairement

   $$C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \dots + \lambda_0 C_1 = \begin{pmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}$$

Or par construction les $a_1,\dots,a_{n-1}$ sont les racines de $P$ donc

$$\begin{pmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}$$

(c) La valeur d'un déterminant est inchangée si l'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes donc

$$\begin{aligned} \det(A) &= |C_1,\dots,C_n| \\ &= |C_1,\dots,C_{n-1},C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \cdots + \lambda_0 C_1| \end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$\det(A) = \left| C_1,\dots,C_{n-1}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix} \right|$$

En développant par rapport à la dernière colonne :

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

En réitérant le développement :

$$\det(A) = P(a_n) \times \prod_{i=1}^{n-2} (a_{n-1} - a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-3} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-2}^2 & \dots & a_{n-2}^{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \times \prod_{i=1}^{n-2} (a_{n-1} - a_i) \times \cdots \times \prod_{i=1}^{2} (a_3 - a_i) \times (a_2 - a_1)$$

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}^{n-2} (a_j - a_i)$$

(d) $A$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Autrement dit d'après la question précédente si et seulement si $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$

**Partie E : application à la recherche de paraboles.**

1. (a) Soit $i \in [\![1,3]\!]$ et $\Gamma$ une parabole d'axe parallèle à $D$.
Par définition : $A_i(a_i,b_i) \in \Gamma \Leftrightarrow b_i = \alpha a_i^2 + \beta a_i + \gamma$.
Donc :

$$\left\{\begin{array}{l} A_1(a_1,b_1) \in \Gamma \\ A_2(a_2,b_2) \in \Gamma \\ A_3(a_3,b_3) \in \Gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b_1 = \alpha a_1^2 + \beta a_1 + \gamma \\ b_2 = \alpha a_2^2 + \beta a_2 + \gamma \\ b_3 = \alpha a_3^2 + \beta a_3 + \gamma \end{array}\right.$$

(b) Si $a_1 = a_2$ alors, d'après les deux premières lignes du système, $b_1 = b_2$. Autrement dit $A_1 = A_2$ ce qui est impossible les points $A_i$ étant supposés distincts (deux à deux).
Sous cette hypothèse le système n'admet pas de solution.

(c) i. La matrice du système est $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}$.
Le déterminant de cette matrice est un déterminant de Vandermonde. D'après la partie D, ce dernier est inversible si et seulement si les $a_i$ sont deux à deux distincts. Cette dernière hypothèse étant supposée vraie par l'énoncé, nous pouvons affirmer que le système $(S)$ possède une unique solution.

ii. Redémontrons les formules de Cramer :

> Soient $(S)$ un système d'équation de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$, l'unique solution $(S)$ est le $n$-uplet $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ tel que :
>
> $$\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$
>
> où $A_i$ est la matrice obtenue à partir de $A$ en remplaçant sa $i^{\text{ème}}$ colonne par $B$.

Démontrons ce résultat.
Notons $(C_i)_{1\leq i\leq n}$ les colonnes de $A$. Comme $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est solution de $(S)$

$$\sum_{1\leq i\leq n} x_i C_i = B$$

Donc, pour $j \in [\![1,n]\!]$ :

$$\begin{aligned}
\det(A_j) &= \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, x_i C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) \\
&= x_j \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) \\
&= x_i \det(A)
\end{aligned}$$

Donc ici

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}}$$

iii. Montrons que $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

D'après la question précédente

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

En soustrayant la première ligne aux deux autres

$$\begin{aligned}
\alpha = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1-1 & a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ 1-1 & a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & b_2 - a_1 \\ 0 & a_3 - a_1 & b_3 - a_1 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

En développant par rapport à la première colonne

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0$$