
Capes externe de mathématique épreuve 1.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

I Problème 1.

Les parties **D** et **E** de ce problème sont indépendantes des parties **B** et **C**.

Notation

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

Pour m et n deux entiers naturels, $\llbracket m, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leq k \leq n$.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur I , n fois dérivables et dont la dérivée n -ième est continue.

Pour n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Pour tout entier naturel n , $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égale à n .

Partie A : interpolation de Lagrange.

Soit n un entier supérieur ou égale à 2 et soient a_1, \dots, a_n des réels deux à deux distincts. Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que L_k est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Il est clair que L_k vérifie bien la propriété proposée.

Montrons qu'il est unique.

Considérons

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{cases}$$

φ est une application \mathbb{R} -linéaire entre des espaces vectoriels de même dimension. Pour que φ soit un isomorphisme il faut et il suffit donc que φ soit injective c'est-à-dire que $\ker(\varphi) = \{0\}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Si $\varphi(P) = 0$, alors $P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$. Ainsi P est un polynôme de degré inférieur à $n - 1$ qui admet n racines distinctes. Donc $P = 0$, et φ est injective.

Puisque φ est un isomorphisme il existe un unique polynôme P tel que $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

2. On considère l'application

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{cases}$$

(a) Montrer que F est une application linéaire.

$(\mathbb{R}_{n-1}[X], +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels.

F est linéaire puisque : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^2$,

$$F(\lambda P + Q) = \lambda (P(a_1), \dots, P(a_n)) + (Q(a_1), \dots, Q(a_n))$$

(b) Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

Nous remarquons, d'après la question A.1, que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, F(L_k) = e_k$.

Ce qui établit l'existence du polynôme P .

(c) Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

Montrons que F est surjective.

Soit $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Avec les notations de la question précédente : $y = \sum_{1 \leq k \leq n} y_k e_k$.

D'après notre remarque à la question précédente : $y = \sum_{1 \leq k \leq n} y_k F(L_k)$.

Puisque F est \mathbb{R} -linéaire : $y = P \left(\sum_{1 \leq k \leq n} y_k L_k \right)$.

Comme $\sum_{1 \leq k \leq n} y_k L_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, nous avons bien établi que F est surjective.

F est une application linéaire surjective entre deux espaces vectoriels de même dimension donc c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_k) = f(a_k)$. Ce polynôme P est appelé *polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses a_1, \dots, a_n* .

P est l'unique antécédent de $(f(a_1), \dots, f(a_n))$ par la bijection F .

- (b) Exprimer le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses a_1, \dots, a_n à l'aide des polynômes L_1, \dots, L_n et des valeurs de f en a_1, \dots, a_n .

On vérifie aisément que si

$$P = \sum_{1 \leq k \leq n} f(a_k) L_k$$

alors

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_k) = f(a_k)$$

Partie B : erreur d'interpolation.

Soient $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} et n un entier naturel supérieur ou égale à 2. Soit f une fonction dans $\mathcal{C}^n([a, b])$ et $a_1 < \dots < a_n$ des nombres réels appartenant à $[a, b]$. On note P le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses a_1, \dots, a_n (on rappelle que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$). Le but de cette partie est de majorer la valeur absolue de la différence entre f et P sur le segment $[a, b]$.

1. Soit g une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

- (a) **Question de cours.** Énoncer le théorème de Rolle.

Soient $a < b$ des réels, f une fonction définie sur $[a, b]$.

$$\text{Si : } \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b], \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[, \\ \text{et } f(a) = f(b) \end{cases}$$

alors : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

- (b) On suppose que g est n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer que la fonction dérivée n -ième $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.

Puisque $n \geq 2$ on peut noter pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_k : \ll g^{(k)} \text{ s'annule en } n + 1 - k \text{ points distincts de } [a, b] \gg$.

Montrons par récurrence sur k que P_k est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

P_0 est vrai par hypothèse.

Soit $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Supposons P_k vraie est démontrons qu'alors P_{k+1} l'est aussi.

$g^{(k)}$ s'annule en $n + 1 - k$ points distincts de $[a, b]$ que nous noterons $\beta_1 < \dots < \beta_{n+1-k}$.

Soit $h \in \llbracket 0, n + 1 - k - 1 \rrbracket$.

$g^{(k)}$ qui est définie sur $[\beta_h, \beta_{h+1}]$ vérifie bien les hypothèses du théorème de Rolle :

— $g^{(k)}$ est continue sur $[\beta_h, \beta_{h+1}]$,

— $g^{(k)}$ est dérivable sur $] \beta_h, \beta_{h+1} [$,

— et $g^{(k)}(\beta_h) = g^{(k)}(\beta_{h+1}) = 0$.

donc il existe $c_h \in] \beta_h, \beta_{h+1} [$ tel que $g^{(k+1)}(c_h) = 0$.

Ainsi $g^{(k+1)}$ s'annule en au moins $n - k$ valeurs (nombre d'intervalles $[\beta_h, \beta_{h+1}]$). Autrement dit P_{k+1} est vraie.

Nous avons donc démontré par récurrence que $g^{(k)}$ s'annule en au moins $n + 1 - k$ points.

En particulier $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point.

2. On fixe $c \in [a, b]$, distinct de a_1, \dots, a_n . On définit la fonction g_c sur $[a, b]$ par

$$g_c(x) = f(x) - P(x) + (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^n \frac{x - a_k}{c - a_k}$$

(a) Montrer que g_c s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$.

On vérifie immédiatement que $g_c(a_1) = \dots = g_c(a_n) = g_c(c) = 0$.

Les valeurs a_1, \dots, a_n, c sont bien distinctes.

(b) Montrer que g_c est n fois dérivable sur $[a, b]$ puis que $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.

$f \in \mathcal{C}^n([a, b])$ et $x \mapsto -P(x) + (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^n \frac{x - a_k}{c - a_k}$ est polynomiale donc indéfiniment dérivable.

Donc $g_c \in \mathcal{C}^n([a, b])$.

D'après la question **B.1.(b)** $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.

(c) Soit h_c la fonction définie sur \mathbb{R} par $h_c(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x-a_k}{c-a_k}$.

En remarquant que h_c est une fonction polynôme de degré n , donner une expression de $h_c^{(n)}$, puis de $g_c^{(n)}$.

h_c est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant $\prod_{k=1}^n \frac{1}{c-a_k}$.

Par une récurrence immédiate : $h_c^{(n)}(x) = \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{c-a_k} \right) n!$.

Comme $g_c(x) = f(x) - P(x) - (f(c) - P(c))h_c(x)$, que la dérivation est linéaire, que P est de degré au plus $n-1$: $g_c^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - (f(c) - P(c))h_c^{(n)}(x)$.

Et donc : $g_c^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n!(f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^n \frac{1}{c-a_k}$.

3. (a) Dédire des questions précédentes qu'il existe un réel $\zeta \in [a, b]$ tel que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^n (c - a_k)$$

D'après la question **B.2**, il existe $\zeta \in [a, b]$ tel que $g_c(\zeta) = 0$. Autrement dit : $f^{(n)}(x) - n!(f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^n \frac{1}{c-a_k} = 0$ et donc

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^n (c - a_k)$$

(b) Montrer que le résultat établi dans la question **B.3.(a)** reste vraie si c est égal à l'un des a_k .

P est le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses a_1, \dots, a_n donc :

$$[\exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, c = a_k] \Rightarrow \left[f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^n (c - a_k) = 0 \right]$$

(c) En déduire que

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x \in [a, b]} \prod_{k=1}^n |x - a_k|$$

Soit $c \in [a, b]$.

D'après la question précédente

$$\exists \zeta \in [a, b], f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^n (c - a_k)$$

Or

$$\left| \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \right| \leq \max_{\zeta \in [a,b]} \left| \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \right| = \frac{1}{n!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|$$

et

$$\left| \prod_{k=1}^n (c - a_k) \right| \leq \max_{c \in [a,b]} \left| \prod_{k=1}^n (c - a_k) \right| = \max_{x \in [a,b]} |x - a_k|$$

donc

$$|f(c) - P(c)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x \in [a,b]} \prod_{k=1}^n |x - a_k|$$

Et enfin :

$$\max_{c \in [a,b]} |f(c) - P(c)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x \in [a,b]} \prod_{k=1}^n |x - a_k|$$

Partie C : un exemple.

Dans cette partie, on interpole de deux manières différentes la fonction

$$f : \begin{cases} [0, \pi] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin(x) \end{cases}$$

1. **Première méthode.** On considère le polynôme d'interpolation P de f en les points d'abscisses $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

(a) Calculer P .

D'après A.3.(b)

$$P = \sum_{1 \leq k \leq n} f(a_k) L_k$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X) &= \sin(0) \cdot L_1(X) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) L_2(X) + \sin(\pi) L_3(X) \\ &= \frac{X-0}{\frac{\pi}{2}-0} \cdot \frac{X-\pi}{\frac{\pi}{2}-\pi} \\ &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 X(X-\pi) \end{aligned}$$

(b) En utilisant les résultats de la partie **B**, montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \max_{x \in [0, \pi]} \frac{|x(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi)|}{6}$$

Pour $x \in [0, \pi]$, $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$.

Donc

$$\frac{1}{n!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x \in [a, b]} \prod_{k=1}^n |x - a_k|$$

est successivement égal à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \max_{x \in [0, \pi]} |-\cos(x)| \times \max_{x \in [0, \pi]} \left| x \left(x - \frac{\pi}{2} \right) (x - \pi) \right| \\ & \frac{1}{6} \max_{x \in [0, \pi]} \left| x \left(x - \frac{\pi}{2} \right) (x - \pi) \right| \end{aligned}$$

D'après **B.3.(c)**

$$\forall x \in [0, \pi], |f(x) - P(x)| \leq \max_{x \in [0, \pi]} \frac{|x(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi)|}{6}$$

(c) En déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3 \sqrt{3}}{216}$$

Étudions les variations de $r : x \mapsto x(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi)$ sur $[0, \pi]$.

En développant

$$r(x) = x^3 - \frac{3\pi}{2}x^2 + \frac{\pi^2}{2}$$

En dérivant :

$$r'(x) = 3x^2 - 3\pi x + \frac{\pi^2}{2}$$

Recherchons les racines de ce trinôme Comme $\Delta = b^2 - 4ac = 9\pi^2 - 6\pi^2 = 3\pi^2$ il admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{3\pi - \sqrt{3\pi^2}}{2 \times 3} = \frac{\pi}{6}(3 - \sqrt{3})$ et $x_2 = \frac{\pi}{6}(3 + \sqrt{3})$.

D'où le tableau de variation de r :

x	0	x_1	x_2	π		
$r'(x)$		+	0	-	0	+
$r(x)$			$r(x_1)$		$r(x_2)$	π
	0	\nearrow		\searrow		\nearrow

Or :

$$\begin{aligned}
 r(x_1) &= \frac{\pi}{6}(3 - \sqrt{3}) \left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \right) \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \right) \\
 &= \frac{\pi^3}{6^3} \sqrt{3}(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) \\
 &= \frac{\pi^3 \sqrt{3}}{6^2}
 \end{aligned}$$

et, de même :

$$r(x_2) = -\frac{\pi^3 \sqrt{3}}{6^2}$$

Nous en déduisons l'encadrement : $0 \leq \left| \frac{r(x)}{6} \right| \leq \frac{\pi^3 \sqrt{3}}{6^3}$.

Enfin

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3 \sqrt{3}}{216}$$

2. **Seconde méthode.** On choisit un entier $n \geq 1$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note P_k le polynôme (de degré inférieur ou égale à 1) d'interpolation de f aux points d'abscisses $\frac{k\pi}{n}$ et $\frac{(k+1)\pi}{n}$. On note Q_n la fonction affine par morceaux définie par :

$$Q_n(x) = \begin{cases} P_0(x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{n}, \\ P_1(x) & \text{si } \frac{\pi}{n} \leq x < \frac{2\pi}{n}, \\ \vdots & \\ P_k(x) & \text{si } \frac{k\pi}{n} \leq x < \frac{(k+1)\pi}{n} \quad (k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket), \\ \vdots & \\ P_{n-1}(x) & \text{si } \frac{(n-1)\pi}{n} \leq x < \pi \end{cases}$$

(a) Calculer Q_1 et Q_2 . Tracer la courbe représentative de Q_2 .

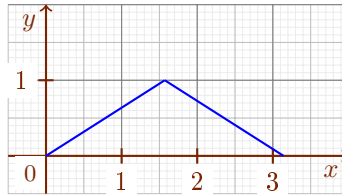
$$Q_1(X) = P_0(X) = \sin(0)L_1 + \sin(\pi)L_2(X) = 0$$

Si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, alors

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= P_0(x) \\ &= \sin(0)L_1(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)L_2(x) \\ &= L_2(x) \\ &= \frac{x-0}{\frac{\pi}{2}-0} \\ &= \frac{2}{\pi}x \end{aligned}$$

Si $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$, alors

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= P_1(x) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)L_1(x) + \sin(\pi)L_2(x) \\ &= L_1(x) \\ &= \frac{x-\pi}{\frac{\pi}{2}-\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi}(x-\pi) \end{aligned}$$



(b) Justifier que Q_n est continue sur $[0, \pi]$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, P_k est une fonction affine donc continue sur $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$.

De plus si $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, alors

$$P_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \frac{x - \frac{(k+1)\pi}{n}}{\frac{k\pi}{n} - \frac{(k+1)\pi}{n}} + \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) \frac{x - \frac{k\pi}{n}}{\frac{(k+1)\pi}{n} - \frac{k\pi}{n}}$$

$$P_k(x) = -\frac{n}{\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \left(x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right) + \frac{n}{\pi} \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) \cdot \left(x - \frac{k\pi}{n}\right)$$

En particulier :

$$P_k\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

Or de même

$$P_{k+1}(x) = -\frac{n}{\pi} \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) \cdot \left(x - \frac{(k+2)\pi}{n}\right) + \frac{n}{\pi} \sin\left(\frac{(k+2)\pi}{n}\right) \cdot \left(x - \frac{k\pi}{n}\right)$$

et donc

$$P_{k+1}\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

Ainsi Q_n est continue sur $[0, \pi[$ et il est clair que P_{n-1} est prolongeable par continuité en π en prenant la valeur 0.

(c) Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$,

$$\left| \left(x - \frac{k\pi}{n}\right) \left(x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right) \right| \leq \frac{\pi^2}{4n^2}$$

La fonction $t : x \mapsto \left(x - \frac{k\pi}{n}\right) \left(x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right)$ est polynomiale de degré 2.

Son extremum est atteint en $\frac{\frac{k\pi}{n} + \frac{(k+1)\pi}{n}}{2} = \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}$.

Le coefficient dominant de t étant positif nous en déduisons son tableau de variation :

x	$\frac{k\pi}{n}$	$\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}$	$\frac{(k+1)\pi}{n}$
$t(x)$	0	$-\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2$	0

(d) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

Soit $x \in [0, \pi]$.

$$\exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, |f(x) - Q_n(x)| = |f(x) - P_k(x)|.$$

P_k étant le polynôme d'interpolation de f en les points $\frac{k\pi}{n}$ et $\frac{(k+1)\pi}{n}$ donc, d'après la question **B.3.(c)** :

$$|f(x) - P_k(x)| \leq \frac{1}{2!} \max_{x \in [0, \pi]} |f^{(2)}(x)| \times \max_{x \in [0, \pi]} \left| \left(x - \frac{k\pi}{n} \right) \left(x - \frac{(k+1)\pi}{n} \right) \right|$$

Et d'après la question précédente

$$|f(x) - P_k(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{4n^2}$$

3. Parmi ces deux méthodes d'approximation, quelle est la meilleure? Justifier la réponse.

$$\frac{\pi^2}{8n^2} > 0, \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216} > 0 \text{ et } \frac{\frac{\pi^2}{8n^2}}{\frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}} = \frac{27}{\pi\sqrt{3}} > 1.$$

$$\text{Donc } \frac{\pi^2}{8n^2} > \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}.$$

La première méthode est la meilleure.

Partie D : déterminant de Vandermonde.

On considère la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égale à 2 et a_1, \dots, a_n sont des nombres réels.

On cherche à déterminer par deux méthodes différentes une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que A soit inversible.

1. Calculer le déterminant de A lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot a_2 - 1 \cdot a_1 = a_2 - a_1.$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = a_2 a_3^2 + a_1 a_2^2 + a_1^2 a_3 - a_2 a_1^2 - a_2^2 a_3 - a_1 a_3^2$$

2. Première méthode.

- (a) Montrer que A est la matrice de l'application linéaire F définie dans la question **A.2** dans des bases bien choisies.

A est la matrice de F dans les bases canoniques des espaces $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et \mathbb{R}^n .

$$F(X^h) = (a_1^h, \dots, a_n^h) = \sum_{i=1}^n a_i^h \cdot e_i$$

Autrement dit

$$\text{Mat}_{(1, X, \dots, X^{n-1}), (e_1, \dots, e_n)}(F) = A$$

- (b) En déduire que si les a_k sont deux à deux distincts A est inversible.

Nous avons établi dans la partie **A** que si les a_k sont distincts F , et donc A , est inversible.

- (c) Qu'en est-il si deux des a_k sont égaux ?

Supposons par exemple que $a_1 = a_2$, alors $F(P) = 0$ lorsque $P(X) = (X - a_2) \dots (X - a_n)$ et pourtant $P \neq 0$ donc F n'est pas injective et *a fortiori* pas bijective.

Si deux des a_k sont égaux alors A n'est pas inversible.

- (d) Conclure.

Nous avons démontré avec les questions **D.2.(b)** et **D.2.(c)** nous avons démontré par conditions nécessaire et suffisante que A est inversible si et seulement si les a_k sont deux à deux distincts.

3. Seconde méthode.

On considère le polynôme

$$P(X) = (X - a_1) \dots (X - a_{n-1}).$$

- (a) Montrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ tels que

$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2}X^{n-2} + \dots + \lambda_1X + \lambda_0.$$

En développant l'expression factorisée de P nous voyons que son monôme dominant est X^{n-1} donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et : $\exists(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2}X^{n-2} + \dots + \lambda_1X + \lambda_0$.

(b) On note C_1, \dots, C_n les colonnes de A . Montrer que

$$C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \dots + \lambda_0C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}$$

Clairement

$$C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \dots + \lambda_0C_1 = \begin{pmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}$$

Or par construction les a_1, \dots, a_{n-1} sont les racines de P donc

$$\begin{pmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}$$

(c) En déduire que

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

La valeur d'un déterminant est inchangée si l'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes donc

$$\begin{aligned} \det(A) &= |C_1, \dots, C_n| \\ &= |C_1, \dots, C_{n-1}, C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \dots + \lambda_0C_1| \end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$\det(A) = \left| C_1, \dots, C_{n-1}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix} \right|$$

En développant par rapport à la dernière colonne :

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

En réitérant le développement :

$$\det(A) = P(a_n) \times \prod_{i=1}^{n-2} (a_{n-1} - a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-3} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-2}^2 & \dots & a_{n-2}^{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \times \prod_{i=1}^{n-2} (a_{n-1} - a_i) \times \dots \times \prod_{i=1}^2 (a_3 - a_i) \times (a_2 - a_1)$$

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

(d) Conclure.

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Autrement dit d'après la question précédente si et seulement si $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$

Partie E : application à la recherche de paraboles.

On fixe trois points distincts A_1, A_2, A_3 du plan affine euclidien. On recherche toutes les paraboles de ce plan passant par A_1, A_2 et A_3 .

1. Dans cette question, on impose en plus aux paraboles recherchées d'avoir un axe parallèle à une droite D donnée. On choisit un repère orthonormé du plan tel que D ait pour équation $x = 0$. Par définition, les paraboles d'axes parallèles à D sont les courbes d'équation

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Les coordonnées du point A_i dans ce repère sont notées (a_i, b_i) pour $1 \leq i \leq 3$.

- (a) Montrer que la recherche des paraboles d'axe parallèle à D et passant par les points A_1 , A_2 et A_3 est équivalente à la recherche des solutions (γ, β, α) , avec $\alpha \neq 0$, du système :

$$(S) : \begin{cases} \gamma + a_1\beta + a_1^2\alpha = b_1, \\ \gamma + a_2\beta + a_2^2\alpha = b_2, \\ \gamma + a_3\beta + a_3^2\alpha = b_3. \end{cases}$$

Soit $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et Γ une parabole d'axe parallèle à D .

Par définition : $A_i(a_i, b_i) \in \Gamma \Leftrightarrow b_i = \alpha a_i^2 + \beta a_i + \gamma$.

Donc :

$$\begin{cases} A_1(a_1, b_1) \in \Gamma \\ A_2(a_2, b_2) \in \Gamma \\ A_3(a_3, b_3) \in \Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \alpha a_1^2 + \beta a_1 + \gamma \\ b_2 = \alpha a_2^2 + \beta a_2 + \gamma \\ b_3 = \alpha a_3^2 + \beta a_3 + \gamma \end{cases}$$

- (b) Montrer que si deux points A_i ont la même abscisse (S) n'a aucune solution.

Si $a_1 = a_2$ alors, d'après les deux premières lignes du système, $b_1 = b_2$. Autrement dit $A_1 = A_2$ ce qui est impossible les points A_i étant supposés distincts (deux à deux).

Sous cette hypothèse le système n'admet pas de solution.

- (c) On suppose que les abscisses des points A_i sont deux à deux distinctes.

- i. Montrer que le système (S) possède une unique solution (γ, β, α) .

La matrice du système est $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de cette matrice est un déterminant de Vandermonde. D'après la partie D, ce dernier est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts. Cette dernière hypothèse étant supposée vraie par l'énoncé, nous pouvons affirmer que le système (S) possède une unique solution.

- ii. Exprimer α sous forme d'un quotient de déterminants.

Démontrons les formules de Cramer :

Soient (S) un système d'équation de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$, l'unique solution (S) est le n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

où A_i est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa $i^{\text{ème}}$ colonne par B .

Démontrons ce résultat.

Notons $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ les colonnes de A . Comme (x_1, x_2, \dots, x_n) est solution de (S)

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i C_i = B$$

Donc, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \det(A_j) &= \det(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \det(C_1, \dots, C_{j-1}, x_i C_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= x_j \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= x_j \det(A) \end{aligned}$$

Donc ici $\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}}$

iii. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\alpha = 0$,
- (ii) $\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0$
- (iii) A_1, A_2 et A_3 sont alignés.

Montrons que (i) \Leftrightarrow (ii).

D'après la question précédente

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

En soustrayant la première ligne aux deux autres

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1-1 & a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ 1-1 & a_3-a_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2-a_1 & b_2-a_1 \\ 0 & a_3-a_1 & b_3-a_1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

En développant par rapport à la première colonne

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix} = 0$$

Montrons que (ii) \Leftrightarrow (iii).

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} a_2-a_1 \\ b_2-a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3-a_1 \\ b_3-a_1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est une famille libre} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} \right\} \text{ est une famille libre} \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à dire que $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_1A_3}$ sont colinéaires. Autrement dit A_1 , A_2 et A_3 sont colinéaires.

2. Montrer que le problème admet une solution si et seulement si A_1 , A_2 , A_3 ne sont pas alignés et aucune des droites (A_1A_2) , (A_2A_3) et (A_1A_3) n'est parallèle à D .