Capes externe de mathématique épreuve 1 session 2014.

Problème 1 : sommes de Riemann.

- **Partie A : convergence des sommes de Riemann.**

1. $(b-a)f$ est continue sur le compact $[a;b]$ donc, d'après le théorème de heine elle est uniformément continue sur $[a;b]$.
   Autrement dit :
   $$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |(b-a)[f(x)-f(y)]| \leq \epsilon$$
   autrement dit :
   $$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |f(x)-f(y)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

2. (a) Puisque $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive convergente vers 0 :
   $$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \eta$$
   Soit $t \in [x_k; x_{k+1}]$. On a :
   $$\begin{aligned} |t - x_k| &\leq |x_{k+1} - x_k| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &\leq \eta \end{aligned}$$
   et donc, d'après la question précédente :
   $$|f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$
   Finalement :
   $$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in [x_k; x_{k+1}],\ |f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

   (b) Soit $n \geq N$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   En sommant sur l'intervalle $[a,b]$ l'inégalité précédemment obtenue :
   $$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| \,\mathrm{d}t &\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\epsilon}{b-a} \\ &\leq \frac{\epsilon}{b-a}\frac{b-a}{n} \\ &\leq \frac{\epsilon}{n} \end{aligned}$$

Or :

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\ \mathrm{d}t$$

donc :

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k)\ \mathrm{d}t\right| \leq \frac{\epsilon}{n}$$

On a montré que :

$$\forall n \geq N,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k)\ \mathrm{d}t\right| \leq \frac{\epsilon}{n}$$

Soit $n \geq N$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - (b-a)S_n(f)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(x_k)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\ \mathrm{d}t\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k)\ \mathrm{d}t\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t - f(x_k)\ \mathrm{d}t\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{n} \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall n \geq N,\ \left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - (b-a)S_n(f)\right| \leq \epsilon$$

3. Au cours des questions précédentes on a établi :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ \left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - (b-a)S_n(f)\right| \leq \epsilon$$

Ce qui est précisément l'expression de la convergence de la suite $((b-a)S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.
D'autre part puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Rn(f) = \frac{x_n - x_0}{n} + S_n(f)$$

avec $x_n = b$ et $x_0 = a$, on peut conclure :

$$R_n(f) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On remarque que :
   $$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$
   En notant g la restriction à $[1;2]$ de la fonction inverse et pour tout $k \in [\![1,n]\!],\ x_k = 1 + \frac{k}{n}$:
   $$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{g(x_k)}$$
   En reprenant les notations de l'énoncé :
   $$u_n = R_n(g)$$
   On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2-1}\int_1^2 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$. Autrement dit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

5. (a) f' étant une application continue d'une segment réel dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Weierstrass, elle est bornée et atteint ses bornes :
   $$\exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in [a,b],\ |f'(t)| \leq M$$
   (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $t \in]x_k, x_{k+1}[$.
   f est continue sur $[x_k, t]$ et dérivable sur $]x_k; t[$ et, de plus $|f'| \leq M$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :
   $$|f(t) - f(x_k)| \leq M(t - x_k)$$
   On a donc démontré que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in [x_k, x_{k+1}],\ |f(t) - f(x_k)| \leq M(t - x_k)$$
   (c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)-f(x_k)\ \mathrm{d}t\right| &\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)-f(x_k)|\ \mathrm{d}t\\
&\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} M(t-x_k)\mathrm{d}t\\
&\leq M\left[\frac{t^2}{2}-x_k t\right]_{x_k}^{x_{k+1}}\\
&\leq \frac{M}{2}(x_{k+1}-x_k)^2\\
&\leq \frac{M}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\\
&\leq \frac{M(b-a)^2}{2n^2}
\end{aligned}
$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)-f(x_k)\ \mathrm{d}t\right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n^2}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-(b-a)S_n(f)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t-(x_{k+1}-x_k)\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\mathrm{d}t\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)-f(x_k)\mathrm{d}t\right|\\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)-f(x_k)\mathrm{d}t\right|\\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M(b-a)^2}{2n^2}\\
&\leq \frac{M(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}
$$

On a donc montré :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-(b-a)S_n(f)\right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

6. (a) f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

et :

$$f"(x) = (4x^2 - 2)\mathrm{e}^{-x^2}$$

On en déduit le tableau de variation de f' :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f"(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	0	$\searrow$	$-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$-2\mathrm{e}^{-1}$

D'où :

$$\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leq \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

(b) Voici un programme possible en langage informel :

Variables	ϵ, n, M, k, S
Entrée	ϵ

Traitement	Affecter 1 à n
	Affecter $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ à M
	Tant que $\frac{M}{2n} > \epsilon$ faire :
	    Affecter $n+1$ à n
	Affecter 0 à S
	Pour k allant de 0 à $n-1$ faire :
	    Affecter $S + \mathrm{e}^{-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ à S

Sortie	Afficher $\frac{S}{n}$

En programmant cet algorithme on obtient pour valeur approchée à 10^{-3} près :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x \approx 0,747$$

- **Partie B : application à l'étude de suites.**

1. Soient $n \geq 2$ un entier et $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Puisque f décroissante sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, pour tout $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ on a :
$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$
Et puisque f est continue sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ on peut intégrer :
$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\ \mathrm{d}t \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\ \mathrm{d}t$$
Autrement dit :
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. Soit $n \geq 2$ une entier naturel;
En sommant les $n-1$ obtenus à la question précédente on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\ \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$r_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t \leq r_n - \frac{1}{n} f(1)$$
$$r_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq r_n - \frac{1}{n} f(1)$$
De ces deux inégalités on déduit :
$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. On suppose que $\lim\limits_{x \to 0} I(x) = l$ donc, en particulier :
$$\lim_{n \to +\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = l$$
On suppose que $\lim\limits_{x \to 0} x f(x) = 0$ donc en particulier :
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$
De plus :
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} f(1) = 0$$

On déduit de ces trois limites, que les suites $\left(I\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1)\right)_{n\geq 2}$ et $\left(I\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 2}$ convergent vers la même limite l.

De cette limite commune et de l'encadrement de la question précédente on déduit, d'après le théorème d'encadrement des suites, que $(r_n)_{n\geq 2}$ converge vers l.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
r_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2-1}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right]\\
&= \frac{1}{4n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]-\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\\
&= \frac{1}{4n^3}\left[\sum_{k=1}^{n}k^2\right]-\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)\\
&= \frac{1}{4n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)
\end{aligned}$$

(b) Vérifions que f vérifie les hypothèses faites dans les questions précédentes de la partie B.

* f est continue sur $]0,1]$.
* f est dérivable sur $]0,1]$ et pour tout $x \in]0,1]$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\\
&= \frac{x^2-1}{2x}
\end{aligned}$$

Clairement : $\forall x \in]0,1],\ f'(x) \leq 0$.

Autrement dit f est décroissante sur $]0,1]$.

* En utilisant l'indication de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_x^1 \frac{t^2-1}{4}-\frac{1}{2}\ln t\ \mathrm{d}t\\
&= \left[\frac{1}{12}t^3-\frac{1}{4}t-\frac{1}{2}t\ln t+\frac{1}{2}t\right]_x^1\\
&= \frac{1}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{2}x\\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x\ln x
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to 0^+} I(x) = \frac{1}{3}$$

* Pour tout $x \in]0,1]$:

$$xf(x) = \frac{x^3 - x}{4} - \frac{x}{2}\ln x$$

Donc :

$$\underset{x\to 0^+}{xf(x)I(x)} = 0$$

* Des points précédents et de la question 3 on déduit que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{3}$.

* Or d'après la question précédente :

$$r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{24} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

$$r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)$$

donc :

$$-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}$$

$$\ln\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$$

Finalement :

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1}$$

Autrement dit la suite $\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

- **Partie C : une suite d'intégrales.**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   Procédons à un changement de variable.
   La fonction $x \mapsto |\sin(nx)|$ est continue et définie sur $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$.
   Notons : $\forall u \in [k\pi, (k+1)\pi],\ \phi(u) = \frac{u}{n}$.
   ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[k\pi, (k+1)\pi]$ dans $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$.

Donc :

$$\begin{aligned}\int_{\phi(k\pi)}^{\phi((k+1)\pi)} |\sin nx| \ \mathrm{d}x &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin n\phi(u)|\phi'(u) \ \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u| \ \mathrm{d}u\end{aligned}$$

Or : $\forall u \in [k\pi,(k+1)\pi], \ |\sin u| = (-1)^k \sin u$
donc :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin nx| \ \mathrm{d}x &= \frac{(-1)^k}{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin u \ \mathrm{d}u \\ &= \frac{(-1)^k}{n}\left[-\cos u\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\ &= \frac{(-1)^k}{n}\left(-\cos[(k+1)\pi]+\cos(k\pi)\right) \\ &= \frac{(-1)^k}{n}\left[-(-1)^{k+1}+(-1)^k\right] \\ &= \frac{(-1)^k}{n}(-1)^k 2 \\ &= \frac{2}{n}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin nx| \ \mathrm{d}x = \frac{2}{n}$$

2. (a) Puisque f est continue et croissante sur $[0,\pi]$:

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)|\sin nx| \ \mathrm{d}x \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin nx| \ \mathrm{d}x \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)|\sin nx| \ \mathrm{d}x$$

$$f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin nx| \ \mathrm{d}x \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin nx| \ \mathrm{d}x \leq f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin nx| \ \mathrm{d}x$$

$$\frac{2}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin nx| \ \mathrm{d}x \leq \frac{2}{n}f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

(b) En sommant les $n-1$ encadrements obtenus à la question précédentes lorsque k varie de 0 à $n-1$ et en usant de la relation de Chasles :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin nx| \ \mathrm{d}x \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{n}f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_0^\pi f(x)|\sin nx| \, \mathrm{d}x \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$$

En notant $x_k = \frac{k\pi}{n}$ pour $k \in [0, n-1]$ et reprenant les notations du début de la partie A :

$$2S_n(f) \leq \int_0^\pi f(x)|\sin nx| \, \mathrm{d}x \leq 2R_n(f)$$

3. D'après la partie A, les suites $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite :
$$\frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi f(t) \, \mathrm{d}t$$
De cette double convergence et de l'encadrement précédent on déduit, par les théorèmes d'encadrement, que la suite $\left(\int_0^\pi f(x)|\sin nx| \, \mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t) \, \mathrm{d}t$.
4. En considérant la fonction $-f$ il est clair que l'on obtient le même résultat pour une fonction f continue et décroissante sur $[0, \pi]$.

- **Partie D : une application aux probabilités.**

1. (a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$.
Les fonctions $x \mapsto x^k$ et $x \mapsto (1-x)^m$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. En intégrant par parties on obtient :
$$\begin{aligned} I_{k,m} &= \left[x^k \frac{-(1-x)^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 - \int_0^1 kx^{k-1} \frac{-(1-x)^{m+1}}{m+1} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{k}{m+1} \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{m+1} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{k}{m+1} I_{k-1,m+1} \end{aligned}$$

   (b) Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$.
   *
$$\begin{aligned} I_{0,k+m} &= \int_0^1 x^0(1-x)^{k+m} \\ &= \left[-\frac{(1-x)^{k+m+1}}{k+m+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{k+m+1} \end{aligned}$$

* On déduit des questions (a) et (b) que pour tout $(k, m) \in \mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned} I_{k,m} &= \frac{k!}{(m+1)\dots(m+k)} I_{0,k+m} \\ &= \frac{k!m!}{(m+k+1)!} \end{aligned}$$

(c) Tirer une boule est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « Tirer une boule rouge » avec une probabilité de p.
On réalise n tirages indépendants d'une boule indépendants d'une boule avec remise. On fait donc apparaître un schéma de Bernoulli. La loi de la variable aléatoire X égale au nombre de boules rouges obtenues suit donc une loi binomiale de paramètres n et p : $X\mathcal{B}(n, p)$.
La probabilité de $k \in [\![0, n]\!]$ succès est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Donc : $E(x) = np$.

(d) i. Le choix des urnes relève d'une loi d'équiprobabilité donc se fait avec une probabilité de $\frac{1}{N}$.
Soit $j \in [\![1, N]\!]$. Étant donnée une urne contenant une proportion $\frac{j}{N}$ de boules rouges, comme dans la question précédente la probabilité d'obtenir k boules rouges dans cette urne est :

$$p_{N,j}(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}$$

Donc :

$$p_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}$$

ii. *

$$\begin{aligned} E(X_N) &= \sum_{k=0}^{n} k p_N(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{N} k \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X_N) &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\left(\frac{j}{N}\right)^k\left(1-\frac{j}{N}\right)^{n-k}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} n\frac{j}{N}\\
&= \frac{n}{N^2}\sum_{j=1}^{N} j\\
&= \frac{n}{N^2}\frac{N(N-1)}{2}\\
&= n\frac{(N-1)}{2N}
\end{aligned}$$

* Lorsque N tend vers $+\infty$ cette espérance tend vers $\frac{n}{2}$.

iii. * Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \binom{n}{k}x^k(1-k)^{n-k}$.

D'après la partie A lorsque N tend vers $+\infty$ alors $R_N(f)$ converge vers :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t &= \binom{n}{k}\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}\ \mathrm{d}t\\
&= \binom{n}{k}\frac{k!(n-k)!}{(n-k+k+1)!}\\
&= \binom{n}{k}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}\\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

* On en déduit que la suite de variables aléatoires $(X_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi d'équiprobabilité sur un univers à $n+1$ éléments.

Problème 2 : fonction exponentielle, évolution d'une population.

- **Partie A : la fonction exponentielle.**

1. (a) Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ il en est de même pour $x \mapsto f(x)f(-x)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f(t)f(-t)\right]\Big|_{t=x} &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $x \mapsto f(x)f(-x)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Comme de plus $f(0) = 1$ il s'agit de la fonction constante égale à 1.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(-x) = 1$$

(b) Si f s'annulait en une valeur $a \in \mathbb{R}$, alors f ne serait pas définie en $-a$ ce qui contredit le fait que f est définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi en raisonnant par l'absurde on a établi que f ne s'annule pas en 0.

(c) D'après la question précédente la fonction φ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f(x)]^2} \\ &= \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{[f(x)]^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc φ est constante et égale à 1 puisque $\varphi(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$.

(d) * $\psi(0) = \frac{f(a+0)}{f(a)} = 1$.

* ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

* ψ est solution de (E).

Donc, d'après la question (c), $\psi = f$. Autrement dit :

$$\forall b \in \mathbb{R},\ \frac{f(a+b)}{f(a)} = f(b)$$

(e) f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est de signe constant. Comme de plus $f(0) = 1$, on peut affirmer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2. (a) * $(u_n(x))$ est bien définie puisque : $n > |x| \geq 0$, donc $n \neq 0$.
   * $(v_n(x))$ est bien définie puisque : $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$, donc $u_n(-x) \neq 0$.

   (b) Soit $a \in]-1;+\infty[$.
   Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ P_n : ´ $(a+1)^n \geq 1+na$. Montrons par récurrence sur n que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
      i. P_1 est vraie puisque : $(a+1)^1 = 1 + 1 \times a$.
      ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(1+a)^n \geq 1+a$$

      Comme $a \in]-1;+\infty[$,$1+na \geq 0$ et donc :

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &\geq (1+a)(1+na)\\ &\geq 1+(n+1)a+a^2\\ &\geq 1+(n+1)a\end{aligned}$$

      Donc P_{n+1} est vraie.

   On a donc démontré par récurrence que

$$\forall a \in]-1;+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+a)^n \geq 1+na$$

   (c) i. Soient $x \in \mathbb{R}$ et n un entier naturel non nul tel que $n > |x|$.

$$\begin{aligned}u_n(x) \times \left(1+\frac{x}{n}\right) \times \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} &= \frac{u_n(x)\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= u_{n+1}\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} &= \left[1+\left(-1+\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)\right]^{n+1} \\
&\geq 1+(n+1)\left(-1+\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right) \\
&\geq 1+(n+1)\left(\frac{-1-\frac{x}{n}+1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right) \\
&\geq 1+\frac{\frac{-x}{n}}{1+\frac{x}{n}} \\
&\geq \frac{1}{1+\frac{x}{n}}
\end{aligned}$$

iii. Puisque :

$$\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geq \frac{1}{1+\frac{x}{n}}$$

donc :

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$
$$u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$$

Autrement dit la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (à partir d'un certain rang).

(d) De la question précédente on déduit que $(u_n(-x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (à partir d'un certain rang), puis que $\left(\frac{1}{u_n(x)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (à partir d'un certain rang).

(e) i.

$$\begin{aligned}
v_n(x)-u_n(x) &= v_n(x)\left(1-\frac{u_n(x)}{v_n(x)}\right) \\
&= v_n(x)\left(1-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right) \\
&= v_n(x)\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

ii. Puisque $u_n(x)>0$, $v_n(x)>0$. D'autre part $\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right)>0$. On en déduit : $v_n(x)-u_n(x)\geq 0$.

iii. En utilisant l'inégalité de Bernoulli :

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n &\geq 1-n\frac{x^2}{n^2}\\ &\geq 1-\frac{x^2}{n}\end{aligned}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}v_n(x)\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) &\leq v_n(x)\left(1-1+\frac{x^2}{n}\right)\\ &\leq v_n(x)\times\frac{x^2}{n}\end{aligned}$$

(f) * $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante et positive donc bornée à partir d'un certain rang. Donc $\left(v_n(x)\times\frac{x^2}{n}\right)_{n>|x|}$ converge vers 0.

* De l'encadrement :

$$0\leq u_n(x)-v_n(x)\leq v_n(x)\times\frac{x^2}{n}$$

on déduit donc que $(v_n(x)-u_n(x))_{n>|x|}$ converge vers 0.

* On a établi :
— $\forall n>|x|,\ u_n(x)\leq v_n(x)$
— $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante et $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante,
— $(v_n(x)-u_n(x))_{n>|x|}$ converge vers 0.
Les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont donc adjacentes.

* On peut donc conclure que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(u_n(x))_{n>|x|}$ sont convergentes vers une limite commune.

(g) i.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n(0)=1$$

Donc :

$$f(0)=\lim_{n+\infty}u_n(0)=1$$

ii. * D'après le présupposé de l'énoncé :

$$\forall h\in]-1;1[,\ hf(x_0)\leq f(x_0+h)-f(x_0)$$

* Soit $h\in]-1;1[$. En reprenant l'inégalité de l'énoncé avec $a=x_0+h$ et $k=-h$ on obtient les inégalités deux à deux

équivalentes :

$$\begin{aligned}
f(x_0+h-h)-f(x_0+h) &\geq -hf(x_0+h)\\
f(x_0)-f(x_0+h) &\geq -hf(x_0+h)\\
f(x_0+h)-f(x_0) &\leq hf(x_0+h)\\
f(x_0+h)-f(x_0)-hf(x_0+h) &\leq 0\\
f(x_0+h)-f(x_0)-hf(x_0+h)+hf(x_0) &\leq hf(x_0)\\
(1-h)[f(x_0+h)-f(x_0)] &\leq hf(x_0)\\
f(x_0+h)-f(x_0) &\leq \frac{h}{1-h}f(x_0)
\end{aligned}$$

* On a donc obtenu l'encadrement désiré :

$$hf(x_0) \leq f(x_0+h)-f(x_0) \leq \frac{h}{1-h}f(x_0)$$

iii. Puisque pour tout $h \in]-1;1[$ on a :

$$f(x_0) \leq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq \frac{1}{1-h}f(x_0)$$

En passant à la limite lorsque h tend vers 0, on remarque que f est dérivable en x_0 et que son nombre dérivé en x_0 est $f(x_0)$.
Conclusion : pour peu que l'inégalité fournie à la question 2.g.ii. soit exacte la fonction f égale sa dérivée et vaut 1 en 0 donc est solution de (E).

- **Partie B : évolution d'une population.**

1. L'existence et l'unicité de la fonction N est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz.
2. *Étude qualitative.*

(a) Puisque N est solution de (E) on a :

$$\forall t \in I,\ N'(t) = rN(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)$$

Or :

$$0 < N(t) < K$$

donc

$$0 < 1-\frac{N(t)}{K} < 1$$

D'où :

$$0 < rN(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right) < rK$$

Ainsi

$$\forall t \in I,\ N'(t) > 0$$

et donc la fonction N est strictement croissante sur I.

(b) N est strictement croissante, d'après la question précédente, et majorée par K, par hypothèse. Le théorème de la limite monotone nous permet donc d'affirmer que N admet une limite finie en $+\infty$.

(c) Raisonnons par l'absurde en supposant que $l > K$.
Puisque $N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ et puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} N = l$, on en déduit que N' converge en $+\infty$ vers $l_1 = rl\left(1 - \frac{l}{K}\right)$.
On a fait l'hypothèse que $l < K$ et donc que $l_1 > 0$.
Soit ϵ tel que $0 < \epsilon < l_1$.
Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} N' = l_1$:

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t > \eta,\ l_1 - \epsilon < N'(t) < l_1 + \epsilon$$

En intégrant :

$$\forall x > \eta,\ \int_\eta^x l_1 - \epsilon \ \mathrm{d}t \leq \int_\eta^x N'(t)\ \mathrm{d}t$$

Si $x > \eta$ alors

$$(l_1 - \epsilon)(x - \eta) \leq N(x) - N(\eta)$$

On en déduit que N diverge en $+\infty$. Ceci est impossible d'après la question précédente. On a donc démontré par l'absurde que $l = K$.

3. (a) Puisque $N > 0$ la fonction g est bien définie et est dérivable sur I de plus pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{N'(t)}{N(t)^2} \\ &= -\frac{rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)}{N(t)^2} \\ &= -\frac{r}{N(t)} + \frac{r}{K} \\ &= -rg(t) + \frac{r}{K} \end{aligned}$$

Ainsi g est solution sur I de (E').

(b) (E') est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
* L'ensemble des solutions de l'équation homogène : $y' = -ry$ est :

$$\{\lambda \exp(-rx)\,|\lambda \in \mathbb{R}\}$$

* Par la méthode de variation on trouve que la fonction définie sur I par : $\forall t \in I,\ g_0(t) = \frac{1}{K}$ est une solution particulière de (E').

* On en déduit l'ensemble des solutions de (E') :

$$\left\{ \lambda \exp\left(-rx\right) + \frac{1}{K} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

* On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in I,\ N(t) = \frac{1}{\lambda \exp\left(-rt\right) + \frac{1}{K}}$$

Par hypothèse : $N(0) = N_0$ et donc :

$$\frac{1}{\lambda + \frac{1}{K}} = N_0$$

qu'on résoud en :

$$\lambda = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}$$

On en déduit une expression de N sur I :

$$N(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right) \exp\left(-rt\right) + \frac{1}{K}}$$

(c) Puisque $r > 0$:

$$\lim_{t \to +\infty} \exp(-rt) = 0$$

Et donc :

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = K$$