ministère
Éducation
nationale

GBE MAT 2

SESSION 2014

CAPES
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

A

Tournez la page S.V.P.

GBE MAT 2

SESSION 2014

CAPES
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

Section :
MATHEMATIQUES

DEUXIEME COMPOSITION

RECTIFICATIF

Problème 1

Titre de la partie B, page 2

Au lieu de matrices d'odre fini à coefficients réels

Lire matrices d'ordre fini à coefficients réels

Problème 2

Partie D, question 3, page 6

Au lieu de $\pi(b) = \ell$

Lire $\pi(p) = \ell$.

Problème 1 : matrices d'ordre fini.

Notations et définitions.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$) l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}$ (respectivement à $\mathbb{R}$, à $\mathbb{Z}$).
La matrice identité de taille n est notée I_n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et noté $Sp(A)$.
On dit que A est **d'ordre fini** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = I_n$.
Si A est d'ordre fini, le plus petit entier strictement positif k tel que $A^k = I_n$ est appelé **ordre** de A et noté $o(A)$.

Partie A : préliminaires

1. Cette question consiste en des rappels de théorèmes du cours.
   1.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.
      i. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
      ii. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   1.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.
   Que deviennent les conditions précédentes lorsque l'on s'intéresse à la trigonalisation ou à la diagonalisation de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'ordre fini. On pose $o(B) = b$.
   2.1. Démontrer que B est inversible.
   2.2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $B^k = I_n$ si et seulement si b divise k.
   2.3. Démontrer que les valeurs propres de B sont des racines b-ièmes de l'unité.
   2.4. Démontrer que B est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ses valeurs propres sont notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
   On suppose que C est diagonalisable et que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i est une racine n_i-ième de l'unité pour un certain entier n_i.
   Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on note k_i le plus petit entier strictement positif tel que $\lambda_i^{k_i} = 1$.
   3.1. Démontrer que C est d'ordre fini et que son ordre divise le PPCM de $k_1, \ldots, k_n$.
   3.2. Démontrer que $o(C)$ est le PPCM de $k_1, \ldots, k_n$.

Partie B : matrices d'odre fini à coefficients réels

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'ordre fini. Le but est de démontrer que cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et de déterminer le spectre de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que si toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont réelles, alors $Sp(A) \subseteq \{-1, 1\}$.
2. On suppose que 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.
   2.1. Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   2.2. On pose $B = P^{-1}AP$. Démontrer que B est d'ordre fini.
   2.3. Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4. En déduire que $A = I_3$.

3. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

4. On suppose que -1 est valeur propre simple de A et que 1 est valeur propre double de A.

4.1. Justifier qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. On pose $C = Q^{-1}AQ$.
Démontrer qu'il existe trois suites de nombres réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel k :

$$C^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définira ces suites à l'aide de relations de récurrence.

4.3. Donner une expression de γ_k pour tout $k \geq 0$.

4.4. En déduire que $c = 0$.

4.5. En déduire que C et A sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

5. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est valeur propre double de A et 1 est valeur propre simple de A.

6. On suppose que A admet dans $\mathbb{C}$ au moins une valeur propre non réelle.

6.1. Démontrer qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q} \setminus \pi\mathbb{Z}$, tel que $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$.
On pourra considérer le polynôme caractéristique de A.

6.2. Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est d'ordre fini si, et seulement si, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ tel que $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$.

Partie C : matrices d'ordre fini à coefficients entiers

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, d'ordre fini. D'après la partie B, son spectre dans $\mathbb{C}$ est de la forme $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$, où $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

1. Démontrer que $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$.
On pourra considérer la trace de A.

2. Donner les valeurs possibles pour θ.

3. Donner les différents spectres dans $\mathbb{C}$ possibles pour A puis démontrer que $o(A) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

4. On cherche maintenant à construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ de chaque ordre.

4.1. Donner des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 1 et 2.

4.2. i. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le polynôme caractéristique de : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}$.

ii. Construire une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ dont les valeurs propres sont 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
Démontrer que cette matrice est d'ordre 3.

iii. Construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 4 et d'ordre 6.

Problème 2 : décimales des nombres rationnels

Notations et définitions

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ désignent respectivement l'ensemble des nombres entiers naturels, celui des nombres entiers relatifs, celui des nombres décimaux et celui des nombres rationnels.
Un nombre réel x est dit *décimal* s'il existe un entier n tel que $10^n x \in \mathbb{Z}$.

On dit qu'une suite d'entiers naturels $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décimale si, pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq d_n \leq 9$, le premier terme d_0 étant un entier naturel quelconque.
Une suite décimale est dite *finie* si tous ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.
Elle est dite :
- *impropre* si tous ses termes sont égaux à 9 à partir d'un certain rang;
- *propre* dans le cas contraire du précédent.

On définit pour tout réel x la partie entière de x, notée $E(x)$, par la condition : $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Le but de ce problème est de démontrer quelques propriétés des nombres décimaux, puis d'étudier les décimales des nombres rationnels non décimaux.

Partie A : nombres décimaux

1. Démontrer que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ et que ces inclusions sont strictes.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ est stable pour l'addition et la multiplication.
3. Soit x un nombre rationnel positif. On pose $x = \dfrac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels premiers entre eux et $b \neq 0$.
   3.1. On suppose qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, tels que $b = 2^\alpha \times 5^\beta$. Démontrer que x est décimal.
   3.2. On suppose que x est un décimal non entier.
   Démontrer que si p est un diviseur premier de b, alors $p \in \{2, 5\}$.
   3.3. Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante sur b pour que le rationnel x soit un nombre décimal.
4. On considère une suite décimale $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   4.1. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ est convergente. On note x sa limite.
   4.2. Démontrer que dans les deux cas suivants x est un nombre décimal :
   - la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est finie;
   - la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est impropre.

   4.3. Démontrer que pour tout entier $N \geq 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \leq \frac{1+d_N}{10^N}$, avec égalité si et seulement si, pour tout $k \geq N+1, d_k = 9$.
   4.4. En déduire que si x est un réel vérifiant $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ et si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décimale propre, alors la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant cette égalité est unique.

   Si $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$, avec $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décimale propre, on note alors $x = d_0, d_1 d_2 ... d_n ...$ et on dit que, pour tout $n \geq 1$, d_n est la n-ième décimale du réel x.
5. Démontrer que pour tout nombre décimal positif x, il existe une unique suite décimale finie $(d_n)_{0\leq n\leq N}$ telle que $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{d_n}{10^n}$.

Parte B : périodicité des décimales d'un rationnel positif non décimal

Soit x un nombre rationnel positif **non décimal**. On pose $x = \dfrac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels premiers entre eux.

On définit par récurrence deux suites d'entiers naturels $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

- d_0 et r_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b ;
- pour tout $n \geq 0$, d_{n+1} et r_{n+1} sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $10\, r_n$ par b.

1. Soit N un entier tel que $N \geq 1$.
   1.1. Écrire un algorithme permettant d'afficher les entiers d_n et r_n de $n = 0$ jusqu'au rang N.
   On suppose disposer d'une instruction calculant la partie entière $E(y)$ d'un réel y.

   1.2. Donner pour le rationnel $x = \dfrac{5}{13}$ les valeurs de d_n et r_n jusqu'au rang $N = 7$.

2. 2.1. Démontrer par récurrence que pour tout entier n : $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n\, b}$.

   2.2. En déduire que, pour tout entier n, r_n est le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par b.

   2.3. Démontrer que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$ et que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décimale propre.

3. Dans cette question, on va établir que les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont périodiques à partir d'un certain rang.

   3.1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $r_n \neq 0$.

   3.2. Démontrer que les nombres $r_0, r_1, ..., r_{b-1}$ ne peuvent pas être deux à deux distincts.

   3.3. Soit q le plus petit indice d'un reste figurant au moins deux fois dans la liste de la question précédente et q' l'indice du premier autre reste qui lui est égal.
   On pose $p = q' - q$, de sorte que $0 \leq q < q + p \leq b - 1$ et $r_q = r_{q+p}$.
   Démontrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir du rang q et que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir du rang $q + 1$.

   Dans la suite, on dit que q est la pré-période du rationnel x et p sa période.
   On note alors $x = d_0, d_1, ...d_q\, [d_{q+1}...d_{q+p}]$ si $q \geq 1$ et $x = d_0, [d_1...d_p]$ si $q = 0$.

4. On conserve dans cette question les notations précédentes.

   4.1. i. Démontrer que parmi les nombres $10^0, 10^1, ..., 10^{b-1}$, au moins deux d'entre eux sont congrus modulo b.

   ii. Démontrer que :
   - q est le plus petit exposant d'un nombre de la liste précédente qui est congru modulo b à un autre nombre de cette liste ;
   - $q + p$ est l'exposant du premier nombre de cette liste congru à 10^q modulo b et distinct de 10^q.

   4.2. Démontrer que le rationnel $x = \dfrac{a}{b}$ a la même période et la même pré-période que $\dfrac{1}{b}$.

   Dans la suite, lorsque la fraction $\dfrac{1}{b}$ est non décimale, q et p seront nommés « la pré-période et la période de l'entier b ».

5. Déterminer la pré-période et la période des entiers suivants : $7; 12; 112$.

Partie C : détermination de la pré-période

On considère un entier b supérieur ou égal à 2 tel que la fraction $\frac{1}{b}$ soit non décimale et on note $\omega(b)$ sa pré-période et $\pi(b)$ sa période.

1. Dans cette question, on suppose que b est premier avec 10.

   1.1. Démontrer l'équivalence : $10^q \equiv 10^{q+p}$ modulo $b \Leftrightarrow 10^p \equiv 1$ modulo b.

   1.2. En déduire que $\omega(b) = 0$.

2. Dans cette question, on pose $b = 2^j \times 5^k \times c$, où c est un entier premier avec 10.
   Démontrer que $\pi(b) = \pi(c)$ et que $\omega(b) = \max(j, k)$.
   On pourra montrer que :
   $10^q\,(10^p - 1)$ *multiple de* $b \Leftrightarrow 10^q$ *multiple de* $2^j \times 5^k$ *et* $10^p - 1$ *multiple de* c.

3. Application : déterminer la période et la pré-période des nombres 150 et 1120.

Partie D : détermination de la période

Dans cette partie, on se propose de déterminer la période des entiers supérieurs ou égaux à 2, qui sont premiers avec 10, en fonction de leur décomposition en facteurs premiers. Si b est un tel entier, d'après la partie C, sa période $\pi(b)$ est le plus petit entier n non nul tel que $10^n \equiv 1$ modulo b.

1. Dans cette question, b est un nombre premier distinct de 2 et 5.

   1.1. On note $\overline{a}$ la classe d'un entier a dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ l'ensemble $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ privé de $\overline{0}$.
   Démontrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* & \to & (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \\ \overline{a} & \mapsto & \overline{10} \times \overline{a} \end{array} \right.$ est bien définie et injective.

   1.2. En utilisant la question précédente, démontrer que : $10^{b-1} \equiv 1$ modulo b.

   1.3. Démontrer que si r est le reste de la division euclidienne d'un entier n par un entier m, alors $10^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $10^n - 1$ par $10^m - 1$.
   On pourra utiliser une forme factorisée de $x^n - 1$, où x désigne un réel quelconque.

   1.4. Déduire des résultats précédents que :
   – si un entier k vérifie $10^k \equiv 1$ modulo b, alors $\pi(b)$ divise k ;
   – $\pi(b)$ divise $b - 1$.

2. Dans cette question, b et c sont deux entiers premiers avec 10 et premiers entre eux.

   2.1. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que $10^n \equiv 1$ modulo bc si et seulement si n est un multiple de $\pi(b)$ et de $\pi(c)$.

   2.2. En déduire que $\pi(bc) = \text{ppcm}(\pi(b), \pi(c))$.

3. Dans cette question, b est un entier de la forme p^n, où p est un nombre premier distinct de 2 et 5, et n un entier naturel non nul. On pose $\pi(b) = \ell$.

   3.1. Justifier l'existence de deux entiers q et r tels que $r \geq 1$ et $10^\ell - 1 = p^r \times q$.

   3.2. *Premier cas* : $n \leq r$. Démontrer que $\pi\left(p^n\right) = \ell$.

   3.3. *Deuxième cas* : $n > r$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, il existe un entier naturel Q premier avec p tel que $10^{\ell \times p^k} - 1 = p^{r+k} \times Q$ et que $\pi\left(p^{r+k}\right) = \ell \times p^k$.
   En déduire que $\pi(p^n) = \ell \times p^{n-r}$.

4. *Applications*

   4.1. Déterminer la période des entiers $3, 3^2, 3^3, 3^4, 7, 7^2$ et 7^3.

   4.2. En déduire la période de l'entier 27783.