Capes externe de mathématique épreuve 2.

I Notations et présentation du sujet.

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul. Si a et b sont deux entiers tels que $a < b$ on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour un polynôme $P(X) \in K[X]$ on notera P la fonction polynôme associée à $P(X)$. On note P' le polynôme dérivé de $P(X)$.

Enfin le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O.

Ce sujet traite de quelques aspects géométriques liés aux racines de polynômes. Les parties A et B sont destinées à donner des majorations des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Dans les parties suivantes, on s'intéresse à localiser les racines d'un polynôme dérivé par rapport aux racines du polynôme. Dans la partie C on établit à ce sujet un théorème de Lucas et dans la partie D on démontre un raffinement de ce théorème pour des polynômes de degré 3.

II Partie A : une majoration des modules des racines d'un polynôme.

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On se propose de montrer que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \max\{|a_0|,1 + |a_1|,1 + |a_2|,\ldots,1 + |a_{n-1}|\}$$

1. **Exemple numérique.**
   On considère les nombres complexes $a_0 = 6 - 2i$, $a_1 = -3 - 5i$, $a_2 = -2 + 3i$, et on définit le polynôme $p(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$

   (a) Montrer que $p(X)$ possède une racine réelle.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$.

   (c) Vérifier que les racines de $p(x)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R ou $R = \max\{|a_0|,1 + |a_1|,1 + |a_2|\}$.

2. **Étude du cas général.**

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$. On pose, pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \text{ et } D_i = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq r_i\}$$

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On pose $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ où $v_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

i. Montrer que pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$|\lambda v_i| \leq r_i \max_{k \in [\![1,n]\!]} (|v_k|)$$

ii. En déduire que : $\lambda \in \cup_{i=1}^{n} D_i$.

(b) Au polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, est associé la matrice carrée d'ordre n notée M_P, appelée matrice compagnon de P,et définie par :

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice $M_P = (m_{ij})$ avec :

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 \text{ si } i - j = 1 \\ m_{in} = -a_{i-1} \\ m_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

i. Montrer que pour tout nombre complexe z on a :

$$\det(M_P - zI_n) = (-1)^n P(z)$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.

ii. En déduire que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|\}$$

III Partie B : la borne de Cauchy.

Dans cette partie on se propose de donner un autre encadrement des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

1. **Un résultat préliminaire.**
Soient $(c_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ des réels positifs non tous nuls. On considère le polynôme $H(X)$ défini par :

$$H(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$$

et on définit sur $]0; +\infty[$ la fonction h par :

$$h(x) = -\frac{H(x)}{x^n}$$

(a) Montrer que la fonction h est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

(b) En déduire que le polynôme $H(X)$ admet une unique racine réelle strictement positive qu'on note α et montrer que cette racine est une racine simple.

(c) Soit ζ une racine complexe de $H(X)$. On suppose que $|\zeta| > \alpha$, montrer alors que :

$$|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$$

(d) En déduire que toutes les racines de $H(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon α.

2. **Une application.**
On considère un entier $m \geq 2$ et un polynôme $F(X) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$ de degré $m-1$ tel que $a_i$soit un réel strictement positif pour tout $i \in [\![0,m-1]\!]$. On pose $\gamma = \max\limits_{i\in[\![1,m-1]\!]} \left\{\dfrac{a_{i-1}}{a_i}\right\}$ et on considère une racine complexe ζ du polynôme $F(X)$.

(a) En considérant le polynôme $F_\gamma(X) = (X-\gamma)F(X)$, montrer que

$$|\zeta| \leq \gamma$$

(b) On pose $\gamma' = \min\limits_{i \in [\![1,m-1]\!]} \left\{ \dfrac{a_{i-1}}{a_i} \right\}$. Montrer que

$$\gamma' \leq |\zeta|$$

3. **La borne de Cauchy.**

Soit $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ soient non tous nuls.

(a) Montrer que l'équation d'inconnue x

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$$

possède une unique solution réelle strictement positive.

Cette racine est appelée la **borne de Cauchy** de $f(X)$ et sera notée dans la suite $\rho(f)$.

(b) Montrer que pour toute racine complexe ζ de $f(X)$ on a :

$$|\zeta| \leq \rho(f)$$

(c) Soit $(\zeta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ les n racines complexes (distinctes ou non) de $f(X)$ avec

$$0 \leq |\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq \cdots \leq |\zeta_n| \leq \rho(f)$$

i. Montrer que pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$ on a :

$$\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leq \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

ii.