Capes externe de mathématique épreuve 2.

I Notations et présentation du sujet.

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul. Si a et b sont deux entiers tels que $a < b$ on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour un polynôme $P(X) \in K[X]$ on notera P la fonction polynôme associée à $P(X)$. On note P' le polynôme dérivé de $P(X)$.

Enfin le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O.

Ce sujet traite de quelques aspects géométriques liés aux racines de polynômes. Les parties A et B sont destinées à donner des majorations des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Dans les parties suivantes, on s'intéresse à localiser les racines d'un polynôme dérivé par rapport aux racines du polynôme. Dans la partie C on établit à ce sujet un théorème de Lucas et dans la partie D on démontre un raffinement de ce théorème pour des polynômes de degré 3.

II Partie A : une majoration des modules des racines d'un polynôme.

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On se propose de montrer que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \max\{|a_0|, 1+|a_1|, 1+|a_2|, \ldots, 1+|a_{n-1}|\}$$

1. **Exemple numérique.**
   On considère les nombres complexes $a_0 = 6-2i$, $a_1 = -3-5i$, $a_2 = -2+3i$, et on définit le polynôme $p(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$

   (a) Montrer que $p(X)$ possède une racine réelle.

   En procédant par analyse synthèse et en considérant les parties imaginaires.

   Démontrons par analyse puis synthèse que $p(X)$ admet une unique racine réelle.

   i. Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}$ soit une racine de p. De

   $$\alpha^3 + (-2+3i)\alpha^2 + (-3-5i)\alpha + 6 - 2i = 0$$

nous déduisons en considérant la partie imaginaire

$$3\alpha^2 - 5\alpha - 2 = 0.$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré deux dont le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49$$

étant strictement positif nous pouvons affirmer qu'elle admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{49}}{2 \times 3} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{49}}{2 \times 3} = 2.$$

ii. Vérifions si ces racines conviennent.

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{33}{8} \text{ et } p(2) = 0$$

Nous avons donc démontré par analyse-synthèse que p admet une unique solution réelle qui est 2.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$.

Cette équation de degré deux peut être résolue en faisant la forme canonique puis en recherchant une racine carrée complexe sous forme algébrique ou, plus simplement, sous forme polaire.

Résolvons l'équation dans $\mathbb{C}$.

Faisons apparaître la forme canonique

$$\begin{aligned} z^2 + 3iz - 3 + i &= \left[z^2 + 2 \times z \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}i\right)^2\right] + \frac{9}{4} - 3 + i \\ &= \left(z + \frac{3}{2}i\right)^2 - \frac{3}{4} + i \end{aligned}$$

Donc

$$z^2 + 3iz - 3 + i \Leftrightarrow \left(z + \frac{3}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} - i$$

Recherchons les racines de $\frac{3}{4} - i$ de la forme $x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

En considérant le module de $(x+iy)^2$

$$\begin{aligned}(x+iy)^2=\frac{3}{4}-i \Rightarrow |x+iy|^2 &= \left(\frac{3}{4}\right)^2+1^2\\ \Rightarrow x^2+y^2 &= \sqrt{\frac{25}{16}}\\ \Rightarrow x^2+y^2 &= \frac{5}{4} \qquad (1)\end{aligned}$$

En considérant la partie réelle de $(x+iy)^2$

$$x^2-y^2=\frac{3}{4} \qquad (2)$$

En considérant la partie imaginaire de $(x+iy)^2$

$$2xy=-1 \qquad (3)$$

De (1) et (2) nous déduisons

$$x^2=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)=1$$

et

$$y^2=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

Donc nécessairement $x=\pm 1$ et $y=\pm\frac{1}{2}$.
Comme de plus, d'après (3) $xy<0$,

$$\exists \epsilon \in \{-1;1\},\ \begin{cases} x=\epsilon 1\\ y=-\epsilon\frac{1}{2}\end{cases}$$

Donc si z est racine de l'équation $z^2+3iz-3+i=0$, alors

$$z+\frac{3}{2}i=\pm\left(1-\frac{1}{2}i\right)$$

Ainsi $z=1-2i$ ou $z=-1-i$.
Nous vérifions aisément que ces deux nombres sont bien solutions de l'équation et donc :

> L'ensemble des solutions de $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$ dans $\mathbb{C}$ est
>
> $\{1 - 2i, -1 - i\}$

(c) Vérifier que les racines de $p(x)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R ou $R = \max\{|a_0|,1 + |a_1|,1 + |a_2|\}$.

Démontrons la propriété de l'énoncé.

En développant nous remarquons que $p(X) = (X-2)(X^2+3iX-3+i)$. Donc les racines de p sont 2, $1 - 2i$ et $-1 - i$.

Déterminons les normes de ces racines.

$$\begin{aligned}|2| &= 2\\ |1 - 2i| &= \sqrt{5}\\ |-1 - i| &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Déterminons R.

$$\begin{aligned}|a_0| &= |6 - 2i| = 2\sqrt{5}\\ 1 + |a_1| &= 1 + |-3 - 5i| = 1 + \sqrt{34}\\ 1 + |a_2| &= 1 + |-2 + 3i| = 1 + sqrt13\end{aligned}$$

Donc $R = \max\{|a_0|,1 + |a_1|,1 + |a_2|\} = 1 + \sqrt{34}$.
Nous constatons que

> les racines de $p(X)$ appartiennent au disque de centre O et de rayon $R = 1 + \sqrt{34}$.

2. **Étude du cas général.**
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$. On pose, pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \text{ et } D_i = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq r_i\}$$

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On pose $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ où $v_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

i. Montrer que pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$|\lambda v_i| \leq r_i \max_{k \in [\![1,n]\!]} (|v_k|)$$

Démontrons que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|\lambda v_i| \leq r_i \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} (|v_k|)$.

De

$$AV = \lambda V$$

nous déduisons (en considérant chaque ligne)

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$$

Avec l'inégalité triangulaire

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda v_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |v_j|$$

Comme : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $|v_j| \leq \max_{k \in [\![1,n]\!]}(|v_k|)$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ |v_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \max_{k \in [\![1,n]\!]} (|v_k|)$$

Avec la notation, r_i, de l'énoncé nous pouvons écrire

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda v_i| \leq r_i \max_{k \in [\![1,n]\!]} (|v_k|)}$$

ii. En déduire que : $\lambda \in \cup_{i=1}^{n} D_i$.

Montrons : $\lambda \in \cup_{i=1}^{n} D_i$.

Autrement dit λ apartient à l'un des D_i.
Or
$$\exists i_0 \in [\![1,n]\!],\ v_{i_0} = \max_{k\in[\![1,n]\!]}(|v_k|)$$
donc d'après la question précédente
$$|\lambda| \leq r_{i_0}\frac{\max_{k\in[\![1,n]\!]}(|v_k|)}{|v_{i_0}}|$$
Donc : $\lambda \in D_{i_0}$.
A fortiori :
$$\boxed{\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i}$$

(b) Au polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, est associé la matrice carrée d'ordre n notée M_P, appelée matrice compagnon de P,et définie par :
$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
c'est-à-dire la matrice $M_P = (m_{ij})$ avec :
$$\begin{cases} m_{ij} = 1 \text{ si } i - j = 1 \\ m_{in} = -a_{i-1} \\ m_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

i. Montrer que pour tout nombre complexe z on a :
$$\det(M_P - zI_n) = (-1)^n P(z)$$
où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Établissons : $\det(M_P - zI_n) = (-1)^n P(z)$.

Introduisons d'abord des matrices dont nous aurons besoin.
Pour $i \in [\![0,n-1]\!]$, notons R_i la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix}
-z & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & \\
1 & -z & 0 & \dots & 0 & & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & 0 & & \\
0 & \dots & 1 & -z & 0 & & & & & \\
0 & \dots & 0 & 1 & -z & & & & & \\
 & & & & & 1 & -z & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & -z & \dots & 0 \\
 & & 0 & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & 1 & -z \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

où le premier bloc diagonal est dans $\mathcal{M}_{i,i}(\mathbb{C})$ et le second dans $\mathcal{M}_{n-1-i,n-1-i}(\mathbb{C})$.

Chaque bloc étant triangulaire (supérieur ou inférieur) son déterminant est le produit de ses termes diagonaux. Comme, de plus, le déterminant d'une matrice diagonale par blocs est le produit des déterminant des blocs :

$$\det(R_i) = (-z)^i \times 1^{n-1-i} = (-z)^i$$

Par construction

$$\det(M_P - zI_n) = \begin{vmatrix}
-z & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\
1 & -z & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\
0 & 1 & -z & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -z & -a_{n-2} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -z-a_{n-1}
\end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière colonne ce déterminant

$$\begin{aligned}\det(M_P - zI_n) = &-a_0 \det(R_0) - a_1 \det(R_1) - \dots \\ &- a_{n-2}\det(R_{n-2}) + (-z - a_{n-1})\det(R_{n-1})\end{aligned}$$

Or $\det(R_i) = (-z)^i$ donc

$$\begin{aligned}\det(M_P - zI_n) = &-a_0 - a_1(-z)^1 - \dots - a_{n-2}(-z)^{n-2} \\ &+ (-z - a_{n-1})(-z)^{n-1}\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons bien

$$\boxed{\det(M_P - zI_n) = (-1)^n P(z)}$$

ii. En déduire que les racines de $P(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon R où

$$R = \max\{|a_0|,1 + |a_1|,1 + |a_2|, \ldots ,1 + |a_{n-1}|\}$$

D'après la question A.2.(b).i, z est racines de P si et seulement z est valeur propre de M_P.

D'après la question A.2.(a).ii, si z est valeur propre de M_P alors $z \in \cup_{i=1}^{n} D_i$ où D_i désigne le disque fermé centré en 0 de $\mathbb{C}$ dont le rayon est la somme des modules des coefficients de la ligne i de M_P

$$|z| \leq \max_{1\leq i\leq n} r_i$$

Or pour M_P

$$r_0 = a_0 \text{ et } r_i = 1 + |a_i| \text{ si } 1 \leq i \leq n - 1.$$

donc

$$|z| \leq \max_{i\in[\![1,n]\!]} \{|a_0|,1 + |a_1|, \ldots ,1 + |a_{n-1}|\}$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{Ainsi les racines de } P \text{ appartiennent au disque de centre } O \text{ et de rayon } R.}$$

III Partie B : la borne de Cauchy.

Dans cette partie on se propose de donner un autre encadrement des modules des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

1. **Un résultat préliminaire.**
   Soient $(c_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ des réels positifs non tous nuls. On considère le polynôme $H(X)$ défini par :

$$H(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$$

   et on définit sur $]0;+\infty[$ la fonction h par :

$$h(x) = -\frac{H(x)}{x^n}$$

(a) Montrer que la fonction h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Montrons la décroissante stricte de h.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
h, étant un quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur s'annule en 0, est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Quelque soit $x \in]0;+\infty[$

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{H(x)}{x^n} \\ &= -1 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^{k-n} \end{aligned}$$

et donc

$$h'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (k-n) x^{k-n-1}$$

Puisque, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $c_k > 0$ et $k-n<0$,

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ h'(x) < 0$$

Enfin

$$\boxed{h \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[.}$$

(b) En déduire que le polynôme $H(X)$ admet une unique racine réelle strictement positive qu'on note α et montrer que cette racine est une racine simple.

Montrons que H admet une unique racine réelle strictement positive.

Remarquons que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ H(\alpha) = 0 \Leftrightarrow h(\alpha) = 0.$$

$h(X)$ est une fraction rationnelle donc

$$h(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{c_0}{x^n}$$

et

$$h(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} -1$$

et donc, puisque $c_0 > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} h(x) = -1$$

Comme de plus h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, nous pouvons affirmer que h réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-1;+\infty[$.
Donc 0 admet un unique antécédent par h dans $]0;+\infty[$.

$H(X)$ admet un unique racine réelle strictement positive.

Montrons que α est une racine simple.

Montrons que α n'a pas un ordre de multiplicité plus grand que 1 en raisonnant par l'absurde.
Supposons que α soit racine d'ordre de multiplicité au moins 2 de H. Alors on devrait avoir

$$H'(\alpha) = 0$$

Or, d'après la question précédente

$$H'(\alpha) < 0$$

donc nous obtenons une contradiction.

Nous avons démontré par l'absurde que α est racine simple de H.

(c) Soit ζ une racine complexe de $H(X)$. On suppose que $|\zeta| > \alpha$, montrer alors que :

$$|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k \, |\zeta|^k$$

Démontrons : $\forall \zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta| > \alpha \Rightarrow |\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k \, |\zeta|^k$.

Puisque $\alpha < |\zeta|$ et puisque h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

$$h(|\zeta|) < h(\alpha)$$

Autrement dit

$$H(|\zeta|) > 0$$

Donc

$$|\zeta|^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k > 0$$

Finalement

si $|\zeta| > \alpha$, alors

$$|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$$

(d) En déduire que toutes les racines de $H(X)$ appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon α.

Démontrons : $\forall \zeta \in \mathbb{C},\ H(\zeta) = 0 \Rightarrow |\zeta| < \alpha$.

Raisonnons par l'absurde en supposant, comme à la question précédente, que $|\zeta| > \alpha$ et donc que

$$|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$$

Puisque ζ est une racine de H

$$\zeta^n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \zeta^k$$

et nous en déduisons

$$\begin{aligned} |\zeta|^n &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k \zeta^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| c_k \zeta^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k \end{aligned}$$

Ce qui contredit le précédent résultat donc nous avons démontré par l'absurde que, nécessairement, $|\zeta| \leq \alpha$.

les racines de $H(X)$ appartiennent au disque de centre O et de rayon α.

2. **Une application.**
On considère un entier $m \geq 2$ et un polynôme $F(X) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$ de degré $m-1$ tel que $a_i$soit un réel strictement positif pour tout $i \in [\![0,m-1]\!]$. On pose $\gamma = \max_{i \in [\![1,m-1]\!]} \left\{ \frac{a_{i-1}}{a_i} \right\}$ et on considère une racine complexe ζ du polynôme $F(X)$.

   (a) En considérant le polynôme $F_\gamma(X) = (X - \gamma)F(X)$, montrer que
$$|\zeta| \leq \gamma$$

Montrons que $\frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma(X)$ vérifie les mêmes critères que $H(X)$ dans la question B.1.

$a_{m-1} > 0$ nous pouvons donc considérer

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma(X) &= \frac{1}{a_{m-1}} \left[(X-\gamma)F(X) \right] \\
&= \frac{1}{a_{m-1}} \left[\sum_{k=0}^{m-1} a_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{m-1} \gamma a_k X^k \right] \\
&= X^m + \frac{1}{a_{m-1}} \left[\sum_{h=1}^{m-1} a_{h-1} X^h - \sum_{k=1}^{m-1} \gamma a_k X^k \right] - \frac{1}{a_{m-1}} a_0 \gamma \\
&= X^m + \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_{k-1} - \gamma a_k}{a_{m-1}} X^k \right) - \frac{a_0}{a_{m-1}} \gamma
\end{aligned}$$

$-\frac{a_0}{a_{m-1}} \gamma < 0$ puisque $a_0 > 0$ et $a_{m-1} > 0$.

Soit $k \in [\![1,m-1]\!]$.
Les a_i étant positifs

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} \leq \max_{i \in [\![0,m-1]\!]} \left(\frac{a_{i-1}}{a_i} \right)$$

i.e.

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} - \gamma \leq 0$$

Puisque $a_k > 0$

$$\frac{a_{k-1} - \gamma a_k}{a_k} \leq 0$$

Ainsi $\frac{1}{a_{m-1}}(X-\gamma)F(X)$ est bien de la même forme que le polynôme H de la question B.1. avec $c_k = -\frac{a_{k-1}-\gamma a_k}{a_k}$ et $c_0 = \frac{a_0}{a_{m-1}}\gamma$. D'après B.1.(b) γ est l'unique racine réelle strictement positive et elle est simple. D'après les conclusions de la question B.1.(d) nous pouvons donc affirmer

si ζ est une racine de F alors

$$|\zeta| \leq \gamma$$

(b) On pose $\gamma' = \min_{i \in [\![1,m-1]\!]} \left\{ \frac{a_{i-1}}{a_i} \right\}$. Montrer que

$$\gamma' \leq |\zeta|$$

3. **La borne de Cauchy.**

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ soient non tous nuls.

(a) Montrer que l'équation d'inconnue x

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$$

possède une unique solution réelle strictement positive.

Cette racine est appelée la **borne de Cauchy** de $f(X)$ et sera notée dans la suite $\rho(f)$.

Nombre de solution de l'équation dans $]0,+\infty[$.

f est de degré n donc $a_n \neq 0$ et nous pouvons écrire que l'équation équivaut à

$$x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} x^k = 0$$

les $\left(\frac{|a_i|}{|a_n|}\right)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ étant non tous nuls. Donc, d'après la question B.1.(b), cette dernière équation admet une unique solution réelle strictement positive.

$$\boxed{\text{L'équation } \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|x^k = |a_n|x^n \text{ possède une unique solution strictement positive.}}$$

(b) Montrer que pour toute racine complexe ζ de $f(X)$ on a :

$$|\zeta| \leq \rho(f)$$

Montrons que si ζ est racine de f alors : $|\zeta| \leq \rho(f)$.

Si $\zeta = 0$ l'inégalité est évidente supposons donc $\zeta \neq 0$.

Comme à la question B.1.(d), si ζ est racine de f

$$|\zeta|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|}|\zeta|^k$$

Donc, en utilisant les notations de la question B.1 après avoir choisi : $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $c_k = \frac{|a_k|}{|a_n|}$, nous pouvons traduire la précédente inégalité par

$$H(|\zeta|) \leq 0$$

Donc, si $\zeta \neq 0$

$$h(|\zeta|) \geq 0$$

Or $0 = H(\rho(f))$ donc

$$h(|\zeta|) \geq h(\rho(f))$$

Et puisque h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

$$|\zeta| \leq \rho(f)$$

$$\boxed{\text{Ainsi si } \zeta \text{ est une racine de } f \text{ alors } |\zeta| \leq \rho(f).}$$

(c) Soit $(\zeta_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les n racines complexes (distinctes ou non) de $f(X)$ avec

$$0 \leq |\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq \cdots \leq |\zeta_n| \leq \rho(f)$$

i. Montrer que pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$ on a :

$$\left|\frac{a_k}{a_n}\right| \leq \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Montrons : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\left|\frac{a_k}{a_n}\right| \leq \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$.

f est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est a_n donc

$$f(X) = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \zeta_k)$$

En développant cette expression et en identifiant avec $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, nous reconnaissons les fonctions symétriques élémentaires. Ainsi pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \ldots \zeta_{i_k}$$

Avec l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| &\leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |\zeta_{i_1}| \cdot |\zeta_{i_2}| \ldots |\zeta_{i_k}| \\ &\leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |\zeta|^k \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n}$ désigne le nombre de partie à k éléments d'un ensemble à n éléments donc

$$\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| \leq |\zeta|^k \binom{n}{k}$$

De $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ on déduit :

$$\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| \leq |\zeta|^k \binom{n}{n-k}$$

Avec un changement de variable $h = n - k$ et puisque $\left|\frac{a_n}{a_n}\right| \leq 1$, nous déduisons

$$\boxed{\forall h \in [\![0,n]\!],\ \left|\frac{a_h}{a_n}\right| \leq \binom{n}{h}|\zeta_n|^{n-h}}$$

ii. En déduire que :

$$\rho(f)^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}$$

Montrons : $\rho(f)^n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}$.

Soit $n \geq 1$.
Par construction de $\rho(f)$

$$\rho(f)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} \rho(f)^k$$

Donc, d'après la question précédente

$$\rho(f)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k} \rho(f)^k$$

Et donc

$$\boxed{\rho(f)^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}}$$

iii. En déduire que :

$$\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \rho(f) \leq |\zeta_n|$$

Établissons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \rho(f) \leq |\zeta_n|$.

D'après la question précédente, en ajoutant $\rho(f)^n$

$$2\rho(f)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}$$

Ce qui équivaut à

$$2\rho(f)^n \leq (\rho(f) - |\zeta_n|)^n$$

Puisque $\rho(f) - |\zeta| \geq 0$, $\rho(f) \geq 0$ et que $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$\sqrt[n]{2}\rho(f) \leq \rho(f) - |\zeta|$$

Et, finalement

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \rho(f) \leq |\zeta_n|.}$$

iv. On suppose que 0 n'est pas racine de $f(X)$ et on pose $g(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$. On note $\rho(g)$ la borne de Cauchy de $g(X)$. Montrer que :

$$\frac{1}{\rho(g)} \leq |\zeta_1| \leq \frac{1}{\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \rho(g)}$$

Établissons : $\frac{1}{\rho(g)} \leq |\zeta_1| \leq \frac{1}{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\rho(g)}$.

$\zeta \neq 0$ est racine de g équivaut successivement à

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \zeta^{n-k} = 0$$

$$\zeta^n \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{1}{\zeta}\right)^k = 0$$

Autrement dit $\frac{1}{\zeta}$ est racine de f.

Donc la plus grande racine de g en module est $\frac{1}{\zeta_1}$ et d'après la question B.3.(b)

$$\frac{1}{|\zeta_1|} \leq \rho(g)$$

En appliquant le résultat de la question B.3.(c).iii à la fonction g nous obtenons aussi

$$\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \rho(g) \leq \frac{1}{|\zeta_1|}$$

En rassemblant les deux précédentes inégalités

$$\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \rho(g) \leq \frac{1}{|\zeta_1|} \leq \rho(g)$$

Et puisque tous les nombres intervenant sont strictement positifs, en considérant les inverses nous obtenons

$$\boxed{\frac{1}{\rho(g)} \leq |\zeta_1| \leq \frac{1}{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\rho(g)}}$$

(d) En reprenant le polynôme $p(X)$ de la question 1 de la partie A, déterminer à la calculatrice une valeur approchée de la borne de Cauchy de $p(X)$ et vérifier pour ce polynôme les résultats obtenus aux questions B.3.(b) et B.3.(c).iii.

Déterminons la borne de Cauchy de p.

À la calculatrice nous obtenons une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut de la solution réelle strictement positive de l'équation $x^3 = |-2+3i|x^2 + |-3-5i|x + |6-2i|$

$$\boxed{\rho(p) \approx 5{,}01854}$$

Vérifions les résultats des questions B.3.(b) et B.3.(c).iii.

Les racines de p sont $\zeta_1 = -1-i$, $\zeta_2 = 2$ et $\zeta_3 = 1-2i$.
Donc : $|\zeta_1| = \sqrt{2}$, $|\zeta_2| = 2$ et $|\zeta_3| = \sqrt{5}$.
Nous avons : $|\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq |\zeta_3| \leq \rho(p)$.
De plus : $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\rho(p) \approx 1{,}3044 \leq \rho(p)$.

$$\boxed{\text{les résultats des questions B.3.(b) et B.3.(c).iii. sont vérifiés pour le polynôme } p(X).}$$

4. **Un raffinement de la borne de Cauchy.**

On considère toujours $f(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que les $(a_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ soient non tous nuls.
On pose

$$f_1(X) = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k$$

On se propose de démontrer que les racines de $f(X)$ appartiennent à $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ où $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont les disques définis par :

$$\mathcal{D}_0 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq \rho(f_1)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_1 \left\{z \in \mathbb{C},\ \left|z + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \leq \rho(f_1)\right\}$$

et où $\rho(f_1)$ désigne la borne de Cauchy de $f_1(X)$.

(a) Montrer que $\rho(f_1) \leq \rho(f)$.

Montrons : $\rho(f_1) \leq \rho(f)$.

Nous allons utiliser la monotonie d'une fonction pour comparer les réels en question.

Notons $\tilde{h}$ la fonction réelle définie pour tout $x \in]0; +\infty[$ par

$$\tilde{h}(x) = \frac{-1}{x^n |a_n|} \left[x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} x^k\right]$$

D'après la question B.1.(a), $\tilde{h}$ est alors strictement décroissante. Par construction de $\rho(f)$,

$$\tilde{h}\left(\rho(f)\right) = 0$$

et

$$\tilde{h}\left(\rho(f_1)\right) = \frac{-1}{\rho(f_1)^n} \times \left(-|a_{n-1}|\rho(f_1)^{n-1}\right) = \frac{|a_{n-1}|}{\rho(f_1)|a_n|} \geq 0$$

car par construction de $\rho(f_1)$

$$|a_n|\rho(f_1)^n - \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|\rho(f_1)^k = 0$$

D'où

$$\tilde{h}\left(\rho(f)\right) \leq \tilde{h}\left(\rho(f_1)\right)$$

et puisque $\tilde{h}$ et décroissante

$$\boxed{\rho(f_1) \leq \rho(f)}$$

(b) Soit ζ une racine de f n'appartenant pas à $\mathcal{D}_0$. Montrer que :

$$|a_{n-1} + a_n\zeta| \leq \frac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|\rho(f_1)^k = |a_n|\rho(f_1)$$

Par construction de $\rho(f_1)$,

$$\frac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|\rho(f_1)^k = |a_n|\rho(f_1)$$

Montrons : $|a_{n-1} + a_n\zeta| \leq \dfrac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} |a_k|\rho(f_1)^k$.

Il faudra utiliser la monotonie d'une fonction, le fait que ζ est une racine de f et que ζ n'appartient pas à $\mathcal{D} - 0$.

ζ est racine de f donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\zeta^k = 0$. Autrement dit

$$a_n\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} = -\sum_{k=0}^{n-2} a_k\zeta^k$$

D'où

$$|a_n\zeta + a_{n-1}| \leq \frac{1}{|\zeta|^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k| \cdot |\zeta|^k$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|x^k$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, sa dérivée étant strictement négative. Or $\zeta \notin \mathcal{D}_0$, *i.e.* $|\zeta| > \rho(f_1)$ donc

$$\frac{1}{|\zeta|^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k| \cdot |\zeta|^k \leq \frac{1}{|\rho(f_1)|^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k| \cdot |\rho(f_1)|^k$$

Par transitivité

$$\boxed{|a_n\zeta + a_{n-1}| \leq \frac{1}{|\rho(f_1)|^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k| \cdot |\rho(f_1)|^k}$$

(c) Conclure.

Montrons que les racines de $f(X)$ appartiennent à $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$.

Si ζ est une racine de $f(X)$, d'après la question précédente si $\zeta \notin \mathcal{D}_0$ alors $\zeta \in \mathcal{D}_1$.
Autrement dit si ζ est une racine de $f(X)$ alors $\zeta \in \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$.

Les racines de $f(X)$ appartiennent à $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$.

IV Partie C : un théorème de Lucas.

On dit qu'une partie Γ du plan $\mathcal{P}$ est convexe si pour tout couple (A,B) de points de Γ, le segment $[AB]$ est contenu dans Γ : c'est-à-dire, en notant a et b les affixes respectives des points A et B, si pour tout $\lambda \in [0,1]$, le point M_λ d'affixe $\lambda a + (1 - \lambda)b$ appartient à Γ. (*En particulier l'ensemble vide est convexe*).

1. **Préliminaires**.

(a) Soit P une partie de $\mathcal{P}$ et E l'ensemble des parties de $\mathcal{P}$ qui sont convexes et qui contiennent P. On pose

$$\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$$

Montrer que $\mathcal{E}(P)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe contenant P. Cette partie $\mathcal{E}(P)$ est appelée **l'enveloppe convexe** de P.

Démontrons que $\mathcal{E}(P)$ est convexe.

Il suffit de montrer que tout segment de $\mathcal{E}(P)$ est inclus dans chaque Γ_0 de E et donc dans leur intersection.

Soient (A,B) un couple de points de $\mathcal{E}(P)$ et $\lambda \in [0; 1]$.
Soit $\Gamma_0 \in E$.
Puisque A et B sont dans l'intersection des parties $\Gamma \in E$, A et B appartiennent à Γ_0.
Puisque Γ_0 est une partie convexe, le point M_λ d'affixe $\lambda a + (1 - \lambda)b$ appartient aussi à Γ_0.
Ainsi M_λ appartient à tout Γ_0 et donc M_λ appartient à l'intersection des Γ_0 choisis dans E.

$\mathcal{E}(P)$ est une partie convexe de $\mathcal{P}$.

Démontrons que $\mathcal{E}(P)$ contient P.

Il suffit de remarquer que P appartient à chaque Γ de E et donc à leur intersection.

Puisque E contient toutes les parties convexes de $\mathcal{P}$ contenant P,

$$\forall \Gamma \in E,\ P \subseteq \Gamma$$

Et donc

$$P \subseteq \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$$

autrement dit

$$P \subseteq \mathcal{E}(P).$$

Démontrons que $\mathcal{E}(P)$ est minimale au sens de l'inclusion.

Découle de ce que $\mathcal{E}(P)$ est une intersection.

Si $\mathcal{C}$ est une partie convexe de $\mathcal{P}$ contenant P, alors $\mathcal{C} \in E$ et donc

$$\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma \subseteq \mathcal{C}$$

autrement dit

$\mathcal{E}(P)$ est la plus petite partie convexe contenant P.

(b) Soit P une partie non vide de $\mathcal{P}$ et notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des barycentres de familles finies de points de P affectés de coefficients positifs. Montrer que $\mathcal{E}(P) = \mathcal{B}$.

$\subseteq$. Montrons que

i. $\mathcal{B}$ est convexe.

ii. $P \subseteq \mathcal{B}$

Par minimalité de $\mathcal{E}(P)$ nous concluons.

$\supseteq$. Le barycentre de deux deux points de P est dans l'enveloppe convexe, donc, par associativité et homogénéité du barycentre il en sera de même pour ce barycentre et un troisième point de P.

Montrons : $\mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{B}$.

i. Soient $(A,B) \in \mathcal{B}^2$, a et b les affixes respectives de A et B, $\lambda \in [0;1]$. Puisque $A \in \mathcal{B}$, A est le barycentre d'une famille finie $(A_i,\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$ de points de P affectés de coefficients positifs (ou $(a_i,\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ avec les affixes). De même pour B.
Donc, par associativité et homogénéité du barycentre, M_λ est barycentre de

$$(A_i,\lambda\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \cup (B_j,(1-\lambda)\mu_j)_{1\leq j\leq m}.$$

Ainsi M_λ est bien le barycentre d'une famille finie d'éléments de P affectée de coefficients positifs. Autrement dit $M_\lambda \in \mathcal{B}$.
Ainsi $\mathcal{B}$ est convexe.

ii. Chaque point de P est son propre barycentre affecté du coefficient 1 donc $P \subseteq \mathcal{B}$.

Nous avons démontré que $\mathcal{B}$ est une partie convexe contenant P, or d'après la question précédente, la plus petite partie convexe contenant P est $\mathcal{E}(P)$, d'où

$$\boxed{\mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{B}.}$$

Montrons : $\mathcal{E}(P) \supseteq \mathcal{B}$.

Soit $A \in \mathcal{B}$, A est le barycentre d'une famille finie $(A_i,\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$ de points de P affectés de coefficients positifs.
Puisque $\mathcal{E}(P)$ est le plus petit convexe contenant P, $\mathcal{E}(P)$ contient

$$\operatorname{bary}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} & \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \end{bmatrix}$$

Et par homogénéité du barycentre ce barycentre, qui est dans $\mathcal{E}(P)$, s'exprime encore

$$\operatorname{bary}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Par une récurrence immédiate en usant de l'associativité et de l'homogénéité du barycentre nous montrions que A appartient bien à $\mathcal{E}(P)$.

$$\boxed{\mathcal{E}(P) \supseteq \mathcal{B}.}$$

2. Soit $f(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n et soit $f'(X)$ son polynôme dérivé. Soit $\{r_1,r_2,\dots,r_m\}$ l'ensemble des racines de $f(X)$ et soit α_j l'ordre de multiplicité de r_j pour tout $j \in [\![1,m]\!]$.

   (a) Montrer que pour tout nombre complexe z n'appartenant pas $\{r_1,r_2,\dots,r_m\}$, on a :
   $$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{z-r_j}$$

   Dérivons l'expression factorisée de f puis simplifions.

   Déterminons $\frac{f'}{f}$.

   Par construction $f(X)=\prod_{j=1}^{m}(X-r_j)^{\alpha_j}$ donc

   $$f'(X)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(X-r_k)^{\alpha_k-1}\prod_{j\in[\![1,m]\!]\setminus\{k\}}(X-r_j)^{\alpha_j}$$

   D'où

   $$\begin{aligned}\frac{f'(X)}{f(X)}&=\frac{\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(X-r_k)^{\alpha_k-1}\prod_{j\in[\![1,m]\!]\setminus\{k\}}(X-r_j)^{\alpha_j}}{\prod_{j\in[\![1,m]\!]}(X-r_j)^{\alpha_j}}\\&=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(X-r_k)^{\alpha_k-1}\frac{\prod_{j\in[\![1,m]\!]\setminus\{k\}}(X-r_j)^{\alpha_j}}{\prod_{j\in[\![1,m]\!]}(X-r_j)^{\alpha_j}}\\&=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(X-r_k)^{\alpha_k-1}\frac{1}{(X-r_k)^{\alpha_k}}\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{(X-r_k)}\end{aligned}$$

   Donc

   quelque soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{r_1,r_2,\dots,r_m\}$
   $$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{(X-r_k)}$$

(b) Soit $r \in \mathbb{C}$ une racine de $f'(X)$ n'appartenant pas à $\{r_1,r_2,\dots,r_m\}$. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{|r-r_j|^2}(r-r_j) = 0$$

et déduire que le point d'affixe r est barycentre des points $M_1,M_2,\dots,M_m$ d'affixes respectives $r_1,r_2,\dots,r_m$.

Déterminons $\frac{f'(r)}{f(r)}$ grâce à la question précédente.
Interprétons géométriquement l'égalité dans $\mathbb{C}$ obtenue.

Montrons : $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{|r-r_j|^2}(r-r_j) = 0.$

Puisque r est une racine de $f'(X)$ mais pas de $f(X)$

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = 0$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{r-r_j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{|r-r_j|^2} \cdot (\overline{r-r_j}) = 0$$

En considérant l'égalité conjuguée nous obtenons finalement

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{|r-r_j|^2}(r-r_j) = 0}$$

Interprétons r en termes de barycentres.

Notons M le point d'affixe r.

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{|r-r_j|^2}(r-r_j) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{MM_j^2}\overrightarrow{MM_j} = \vec{0}$$

Le point d'affixe r est barycentre des points $M_1,M_2,\ldots,M_m$ d'affixes respectives $r_1,r_2,\ldots,r_m$ affectés des coefficients $\frac{\alpha_1}{MM_1^2},\frac{\alpha_2}{MM_2^2},\ldots,\frac{\alpha_m}{MM_m^2}$.

(c) Montrer alors que l'ensemble des points dont les affixes sont les racines de $f'(X)$ est inclus dans l'enveloppe convexe des points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$. (*Théorème de Lucas*)

Si r est aussi racine de f alors le résultat est trivial, sinon il faut utiliser les résultats des questions précédentes.

Montrons que les points dont les affixes sont des racines de $f'(X)$ sont dans l'enveloppe convexe des points dont les affixes sont les racines de $f(X)$.

Soit M un point d'affixe r racine de $f'(X)$. Justifions que M appartient à l'enveloppe convexe.
Si r est une racine de f alors évidemment M appartient à l'enveloppe convexe.
Si r n'est pas une racine de $f(X)$ alors, d'après la question précédente M est le barycentre des points $M_1,\ldots,M_m$. Donc, d'après la question C.1, M est dans l'enveloppe convexe des $M_1,\ldots,M_m$.

Les racines de $f'(X)$ sont dans l'enveloppe convexe des racines de $f(X)$.

(d) Illustrer ce résultat pour le polynôme $p(X)$ défini dans la question 1 de la partie A.

Détaillons le théorème de Lucas pour le polynôme $p(X)$.

Nous avions vu dans la partie A que $p(X) = (X-2)(X-1+2i)(X+1+i)$. En utilisant la forme développée de p nous trouvons

$$p'(X) = 3X^2 + (-4+6i)X + (-3-5i)$$

D'après le théorème de Lucas nous pouvons affirmer que les racines de p' se trouvent dans l'enveloppe convexe des points du plan dont les affixes sont 2, $1-2i$ et $-1-i$, *i.e.* dans le triangle dont les sommets sont ces points.

V Partie D : théorème de Lucas et polynômes de degré 3.

On se propose dans cette partie de démontrer un raffinement du théorème de Lucas pour des polynômes de degré 3. Plus précisément, on se propose de montrer le résultat suivant :

Soit $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré 3. On note M_1, M_2, M_3 les points du plan dont les affixes sont les racines de $f(X)$ et on suppose que M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés.
Alors les racines du polynôme dérivé $f'(X)$ sont les affixes :
- *des foyers de l'ellipse tangente aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leur milieu si $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral,*
- *du centre du cercle inscrit dans le triangle $M_1M_2M_3$ s'il est équilatéral.*

1. **Étude du cas où $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral.**

   Soit $f(X) = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3) \in \mathbb{C}[X]$ où r_1, r_2 et r_3 sont trois nombres complexes distincts. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives r_1, r_2 et r_3 ne sont pas alignés.

   (a) Montrer que $f'(X)$ possède une racine double ω si et seulement si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral et son centre de gravité a pour affixe ω.

   Faisons une démonstration par conditions nécessaire et suffisante.

   Supposons que $f'(X)$ possède une racine double et démontrons qu'alors $M_1M_2M_3$ est équilatéral et que son centre de gravité a pour affixe ω.

   f étant de degré trois, f' est de degré deux.
   Puisque ω est racine double de f' nous en déduisons

   $$\exists \alpha \in \mathbb{C},\ f'(X) = \alpha(X - \omega)^2$$

   f étant un polynôme primitive de f' nous en déduisons

   $$\exists \beta \in \mathbb{C},\ f(X) = \frac{\alpha}{3}(X - \omega)^3 + \beta$$

   Par identification des coefficients dominants qui apparaissent dans cette expression et celle proposée par l'énoncé

   $$\frac{\alpha}{3} = 1$$

   Donc

   $$\alpha = 3$$

Et

$$f(X) = (X - \omega)^3 + \beta$$

En exprimant le fait que r_1, r_2 et r_3 sont des racines de f

$$\forall i \in [\![1,3]\!],\ (r_i - \omega)^3 + \beta = 0$$

D'où

$$\left(\frac{r_1 - \omega}{r_2 - \omega}\right)^3 = \left(\frac{r_2 - \omega}{r_3 - \omega}\right)^3 = \left(\frac{r_3 - \omega}{r_1 - \omega}\right)^3 = 1$$

Les points M_1, M_2 et M_3 étant non alignés cela signifie que $\frac{r_1-\omega}{r_2-\omega}$, $\frac{r_2-\omega}{r_3-\omega}$ et $\frac{r_3-\omega}{r_1-\omega}$ sont des racines troisièmes de l'unité deux à deux distinctes. Donc M_2 et M_3 sont le images successives de M_1 par la rotation centrée sur le centre de gravité et d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$.

$M_1M_2M_3$ est donc équilatéral de centre de gravité d'affixe ω.

Supposons que $M_1M_2M_3$ soit un triangle équilatéral de centre de gravité d'affixe ω et montrons qu'alors ω est racine double de $f'(X)$.

Établissons deux résultats au préalable.

Puisque ω est l'affixe du centre de gravité

$$r_1 - \omega + r_2 - \omega + r_3 - \omega = 0$$

et donc

$$r_1 + r_2 + r_3 = 3\omega$$

$M_1M_2M_3$ est équilatéral et si nous supposons de plus qu'il est direct (ce qui est toujours possible quitte permuter les indices) alors, an notant $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$,

$$r_1 + r_2 j + r_3 j^2 = 0$$

Or

$$(r_1 + r_2 j + r_2 j^2)(r_1 + r_2 j^2 + r_3 j) = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)$$

donc

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}(3\omega)^2 &= (r_1+r_2+r_3)^2\\ &= r_1^2+r_2^2+r_3^2+2(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\\ &= 3(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\end{aligned}$$

En dérivant puis en développant $f(X)=(X-r_1)(X-r_2)(X-r_3)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}f'(X) &= 3X^2-2(r_1+r_2+r_3)X+r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1\\ &= 3X-6\omega X+3\omega^2\\ &= 3(X-\omega)^2\end{aligned}$$

Ainsi $f'(X)$ admet bien ω pour racine double.

(b) Conclure.

la racine double de f' est donc bien l'affixe du centre de gravité du triangle équilatéral $M_1M_2M_3$.

2. **Une propriété de la tangente à l'ellipse.**

Soit a un réel strictement positif et F et F' deux points distincts du plan tels que $FF4<a$. On appelle ellipse de foyers F et F'et e demi-axe focal a l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que :

$$MF+MF'=2a$$

Soit $t\mapsto M(t)$ une paramétrisation de classe C^1 de l'ellipse. Pour tout point $M(t)\in\mathcal{E}$, on note $\vec{\tau}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F}\right)$ un vecteur directeur de la tangente à $(\mathcal{E})$ en $M(t)$ et on pose

$$\vec{u}(t)=\frac{1}{M(t)F}\overrightarrow{M(t)F}\quad \text{et}\quad \vec{v}(t)=\frac{1}{M(t)F'}\overrightarrow{M(t)F'}$$

(a) Montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F'}\right)$$

Démontrons l'égalité vectorielle proposée.

D'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{FM(t)} + \overrightarrow{M(t)F'} = \overrightarrow{FF'}$$

La paramétrisation de l'ellipse étant de classe C^1 nous pouvons dériver et par linéarité :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{FM(t)}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F'}\right) = \overrightarrow{0}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F'}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{M(t)F}\right).}$$

(b) Montrer que le produit scalaire $(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) \cdot \vec{\tau}(t)$ est nul.

En partant de l'égalité métrique caractérisant l'ellipse, par dérivation, et utilisant le résultat précédent.

Démontrons que le produit scalaire est nul.

Par construction des vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$MF + MF' = 2a \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{MF} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{MF'} = 2a$$

La paramétrisation de l'ellipse étant de classe C^1 nous pouvons dériver cette dernière égalité

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u}) \cdot \overrightarrow{MF} + \vec{u} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{MF}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}) \cdot \overrightarrow{MF'} + \vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{MF'}\right) = 0$$

Or en dérivant le vecteur unitaire $\vec{u}$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\vec{u}\|^2) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u}) \cdot \overrightarrow{MF} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}) \cdot \overrightarrow{MF'} = 0.$$

Ainsi

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow \vec{u} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{MF}\right) + \vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{MF'}\right) = 0$$

Or, d'après la question précédente,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{MF}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{MF'}\right)=\vec{\tau}$$

donc

$$\boxed{MF+MF'=2a \Rightarrow (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{\tau}.}$$

(c) En déduire que la tangente à $(\mathcal{E})$ en $M(t)$ est une bissectrice du couple de droites $((M(t)F)\,,(M(t)F'))$.

Justifions l'assertion proposée.

Puisque $\vec{u}$ est un vecteur directeur unitaire de $(M(t)F)$ et puisque $\vec{v}$ est un vecteur directeur unitaire de $(M(t)F')$,

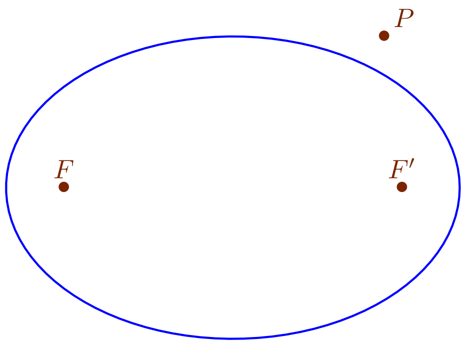
> $\vec{u}+\vec{v}$ est un vecteur directeur d'une bissectrice des droites $(M(t)F)$ et $(M(t)F')$.

3. **Un théorème de Poncelet.**

Soit P un point strictement extérieur à l'ellipse $(\mathcal{E})$ (c'est-à-dire un point P tel que $PF+PF'>2a$) : on admet qu'il existe toujours deux tangentes issues de P à $(\mathcal{E})$ et on note T_1 et T_2 les points de tangences.

(a) Soit F_1 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_1). Montrer que $F'F_1 = 2a$.

Montrons que F', T_1 et F_1 sont alignés puis que $F'T_1+T_1F_1=2a$.



D'après la question précédente (PT_1) est une bissectrice du couple de droites $(F'T_1)$ et (FT_1) donc $(F'T_1)$ est le symétrique de (FT_1) par rapport à (PT_1).

Puisque d'une part F_1 est l'image de F par la symétrie d'axe (PT_1) et que d'autre part $(F'T_1)$ est le symétrique de (FT_1) par rapport à (PT_1), nous en déduisons $F_1 \in (F'T_1)$.

Par construction de l'ellipse :

$$FT_1 + T_1F' = 2a$$

et du fait de la symétrie d'axe (PT_1), $FT_1 = T_1F_1$ donc

$$T_1F_1 + T_1F' = 2a$$

Puisque $T_1 \in [F'F_1]$:

$$\boxed{F'F_1 = 2a.}$$

(b) On note de même F_2 l'image de F par la réflexion d'axe (PT_2). Montrer que (PF') est la médiatrice de $[F_1F_2]$.

On établirait comme précédemment que $F'F_2 = 2a$, donc F' appartient à la médiatrice de $[F_1F_2]$. $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}$ est une rotation de centre P et $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}(F_1) = F_2$ donc $PF_1 = PF_2$; P appartient bien à la médiatrice.

(c) On se propose de montrer que les angles des droites $((PT_1),(PF))$ et $((PF'),(PT_2))$ sont égaux. Pour toute droite D du plan, on note $\mathcal{S}_D$ la réflexion d'axe D.

i. Déterminer $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}(F_1)$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de la composée $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}$.

ii. Déterminer de la même façon la nature et les éléments caractéristiques de la composée $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}$ et conclure.