B.E.L. voie BL 2022.

Les problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

***

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats des questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

***

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement en évidence, par exemple en les $\boxed{\textit{encadrant}}$ *ou en les soulignant. Lors de la correction il sera fait grand cas de la* ***clarté****, de la* ***concision*** *et de la* ***précision*** *de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandée.*

***

Problème A.

On s'intéresse à deux jeux d'apparence similaire.

Premier jeu. On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11 euros et si elle tombe sur face on perd 10 euros. On recommence un certain nombre de fois avec des lancers que l'on suppose indépendants.

Pour $i \geqslant 1$, on note X_i la variable aléatoire égale à 11 si la i-ème pièce tombe sur pile et égale à -10 si elle tombe sur face.

1. Calculer l'espérance $E[X_i]$ de X_i, pour $i \geqslant 1$.

   Les implicites de la description de l'expérience aléatoire qui sont utilisés dans la modélisation : les lancés de pièces sont indépendants les uns des autres, la pièce étant équilibrée la loi régissant un lancé de pièce est $\mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket)$.

   Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \mathbb{P}(X_i = 11) \times 11 + \mathbb{P}(X = -10) \times (-1) \\ &= \frac{1}{2} \times 11 + \frac{1}{2} \times (-10) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*, \ E(X_i) = \tfrac{1}{2}.}$$

On note $S_0 = 100$ le montant initial et S_n le montant obtenu après n lancés.

2. (a) Pour $n \geqslant 1$, exprimer S_n en fonction des X_i, $i \geqslant 1$.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 + \sum_{i=1}^{n} 11X_i - 10(1 - X_i) \\ &= 100 + \sum_{i=1}^{n} 11X_i - 10 + 10X_i \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 100 - 10n + 21 \sum_{i=1}^{n} X_i.}$$

(b) Calculer la probabilité $P(S_2 = k)$ pour tout entier k.

$S_2 = 100 - 10\times 2 + 21(X_1 + X_2) = 80 + 21(X_1 + X_2)$ et $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$ donc

k	$80 + 21 \times 0 = 80$	$80 + 21 \times 1 = 101$	$80 + 21 \times 2 = 122$
$\mathbb{P}(S_2 = k)$	$\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0$

Finalement

k	80	101	122
$\mathbb{P}(S_2 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(c) Pour $n \geqslant 0$, calculer l'espérance $E[S_n]$.

* $S_0 = 100$ donc

$$\boxed{\mathbb{E}(S_0) = 100.}$$

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(100 - 10n + 21\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\\ &= 100 - 10n + 21\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right)\\ &= 100 - 10n + 21n\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(S_n) = 100 + \tfrac{n}{2}.}$$

3. (a) Montrer que $P(S_{10} \geqslant 160) \leqslant \frac{2}{3}$.

   D'après l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(S_{10} \leqslant 160) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{160}$$

   D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(S_{10} \leqslant 160) \leqslant \frac{100 + \frac{10}{2}}{160}$$

   Or $\frac{100+\frac{10}{2}}{160} = \frac{105}{160} = \frac{3\times5\times7}{2^5\times5} = \frac{2}{3} \times \frac{3^2\times7}{2^6} = \frac{2}{3} \times \frac{63}{64} \leqslant \frac{2}{3}$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{10} \leqslant 160) \leqslant \tfrac{2}{3}.}$$

   (b) Montrer que $P(S_n \geqslant 160) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

On suppose maintenant qu'on arrête le jeu dès lors que le montant S_n devient inférieur ou égale à 89 ou supérieur ou égale à 105. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de pièces lancées avant l'arrêt du jeu.

4. (a) Calculer $P(T = 1)$.

   (b) Calculer $P(T = 2)$.

   (c) Si $T \geqslant 3$, que vaut S_2 ?.

(d) Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant supérieur à 100 sachant que l'on a tiré trois pièces au moins ?

(e) Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant égale à 105 ?

Second jeu. On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11 % de notre montant et si elle tombe sur face