J. 19 1135

UHCE 954

SESSION 2019

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 7 pages, numérotées de 1 à 7.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Les trois problèmes qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix.

* * *

Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, on pourra admettre les résultats des questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

* * *

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

* * *

PROBLÈME A.

Les deux premières parties qui suivent sont indépendantes entre elles, la troisième partie utilise des résultats des parties précédentes.

Première partie : étude d'une fonction de deux variables. On introduit la fonction de deux variables

$$\begin{array}{rcl} d :]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & u\ln\left(\dfrac{u}{v}\right) - u + v\,. \end{array}$$

(1) Calculer les dérivées partielles de d par rapport à u et par rapport à v.

(2) On définit la fonction f par $f(x) = d(x,1)$.

(a) Dresser, avec justifications, le tableau de variations de f.

(b) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

(3) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $x\ln(x) \geq x-1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

(4) En déduire que, pour tout u, $v > 0$, $d(u,v) \geq 0$ et que $d(u,v) = 0$ si et seulement si $u = v$.

(5) Soient u et v deux réels positifs fixés. Montrer que

$$d(u,v) = \max_{x\in\mathbb{R}} \left\{xu - v\left(e^x - 1\right)\right\}.$$

À quelle condition le maximum est-il atteint en un réel x strictement positif ?

Seconde partie : transformée de Laplace. Soit Z une variable aléatoire. Pour tout réel x tel que l'espérance de la variable aléatoire e^{xZ} est finie, on définit

$$\Phi_Z(x) = \mathbb{E}\Big[e^{xZ}\Big].$$

(6) Étude de cas particuliers.

(a) Calculer explicitement $\Phi_Z(x)$ lorsque Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

(b) Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln \Phi_Z(x) = \lambda(e^x - 1)$.

Dans la suite de cette partie, Z désigne une variable aléatoire pour laquelle la fonction Φ_Z est définie sur $\mathbb{R}$.

(7) Montrer que Φ_{-Z} est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer en fonction de Φ_Z.

(8) Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left(Z > u\right) \leq \exp\left(-xu\right) \Phi_Z(x).$$

Soit $Z_1, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que Z. On pose

$$\overline{Z}_n = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}.$$

(9) Exprimer $\Phi_{n\overline{Z}_n}(x)$ en fonction de Φ_Z, x et n.

(10) En déduire que, pour u fixé et pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\big(\overline{Z}_n > u\big) \leq \exp\big(-n\big[xu - \ln \Phi_Z(x)\big]\big).$$

Troisième partie : mise en pratique. Une entreprise souhaite optimiser sa page web pour maximiser le nombre de produits achetés par ses clients. À cet effet, elle compare la version actuelle de sa page web (appelée version A) à une nouvelle version proposée par le département marketing (appelée version B) en montrant ces deux versions à deux groupes de n clients et en mesurant le nombre de produits achetés par ceux-ci. Pour $i = 1, \ldots, n$ on note X_i le nombre de produits achetés par le i-ème client du groupe ayant vu la version A (appelé groupe A) et Y_i le nombre de produits achetés par le i-ème client du groupe ayant vu la version B (appelé groupe B). On suppose que les différents clients ont des comportement identiques et indépendants. De plus, on suppose que X_1 suit une loi de Poisson de paramètre λ_A et Y_1 une loi de Poisson de paramètre λ_B. Le test effectué par l'entreprise est basé sur

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \qquad \text{et} \qquad \overline{Y}_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$$

les nombres moyens de ventes dans le groupe A et dans le groupe B respectivement. L'entreprise conserve la version A si $\overline{X}_n \geq \overline{Y}_n$, et adopte la version B sinon. On suppose, pour fixer les idées, que $\lambda_A > \lambda_B$ (ce qui est bien sûr inconnu de l'entreprise effectuant le test).

(11) Idéalement, laquelle des deux versions de sa page web l'entreprise devrait-elle choisir pour maximiser le nombre moyen de ses ventes ?

(12) Dans cette question, on fixe un réel $u \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\overline{Y}_n > u\right) \leq \exp\left(-n\left[xu - \lambda_B(e^x - 1)\right]\right).$$

(b) Montrer que

$$\forall x < 0, \qquad \mathbb{P}\left(\overline{X}_n < u\right) \leq \exp\left(-n\left[xu - \lambda_A(e^x - 1)\right]\right).$$

(13) On suppose maintenant que $\lambda_B < u < \lambda_A$. La fonction d est celle définie et étudiée dans la première partie.

(a) Montrer que $\mathbb{P}\left(\overline{Y}_n > u\right) \leq \exp\left(-n\, d\,(u, \lambda_B)\right)$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}\left(\overline{X}_n < u\right) \leq \exp\left(-n\, d\,(u, \lambda_A)\right)$.

(14) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ que l'on précisera telle que

$$\mathbb{P}\left(\left\{\overline{X}_n < \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2}\right\} \bigcup \left\{\overline{Y}_n > \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2}\right\}\right) \leq 2\exp(-nC).$$

(15) Proposer une minoration de la probabilité que l'entreprise sélectionne la bonne version à l'issue du test. Commenter.

PROBLÈME B. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels de taille $n \times n$. Pour une matrice $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la *transposée* de $\mathbf{A}$ est la matrice $\mathbf{A}^\intercal = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec

$$\text{pour } 1 \leq i, j \leq n, \quad b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Pour tous vecteurs $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathbf{y} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$, on définit le produit scalaire de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ par

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,,$$

et la norme de $\mathbf{x}$ par $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x}|\mathbf{x} \rangle}$. On définit l'ensemble des *matrices anti-symétriques* par

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \, : \, \mathbf{A}^\intercal = -\mathbf{A} \right\}.$$

Les deux premières parties qui suivent sont indépendantes entre elles, la troisième partie utilise des résultats des parties précédentes.

Première partie : étude de deux matrices particulières. On pose

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) La matrice $\mathbf{A}$ est-elle anti-symétrique ? La matrice $\mathbf{B}$ est-elle anti-symétrique ?

(2) Démontrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(3) Soit u l'application linéaire associée à la matrice A.
Déterminer le rang de u et la dimension de son noyau. Donner une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

(4) Montrer que -3 est valeur propre de $\mathbf{B}$ et exhiber un vecteur propre associé.

Deuxième partie : préliminaires.

(5) Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $||\mathbf{x}||^2 = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} = 0$.

(6) Soit $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les cordonnées respectives des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Exprimer le produit scalaire $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y} \rangle$ en fonction de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$.

(7) Montrer que pour tous $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $(\mathbf{AB})^\intercal = \mathbf{B}^\intercal \mathbf{A}^\intercal$.

(8) Soient $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathbf{X}^\intercal \mathbf{A} \, \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^\intercal \mathbf{A}^\intercal \, \mathbf{X}$.

Troisième partie : matrices anti-symétriques. Dans la suite, on fixe une matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $\mathbf{A}$.

(9) (a) Montrer que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle \mathbf{x}|u(\mathbf{x}) \rangle = 0$.
(b) En déduire que l'endomorphisme u n'a pas de valeur propre réelle non nulle.

(10) On note $u^2 = u \circ u$ la composée de u avec lui-même.
Montrer que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle \mathbf{x}|u^2(\mathbf{x}) \rangle = -||u(\mathbf{x})||^2$.

(11) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.

On pose $v = u^2$. Soit λ une valeur propre de v et $\mathbf{x}_0$ un vecteur propre associé.

(12) Montrer que $\lambda \leq 0$.

On suppose dans la suite que $\lambda \neq 0$ et on introduit $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{x}_0, u(\mathbf{x}_0))$.

(13) (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathrm{Im}\, u$.

(b) Montrer que pour tout $\mathbf{x} \in F$ on a $u(\mathbf{x}) \in F$.

(14) On définit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} w : F & \to & F \\ \mathbf{x} & \mapsto & u(\mathbf{x})\,. \end{array}$$

(a) Montrer que w n'admet pas de valeur propre réelle.

(b) Donner la matrice de w dans la base $\left(\mathbf{x}_0, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} u(\mathbf{x}_0)\right)$.

(15) Soit $\mathbf{A}$ la matrice introduite dans la première partie.
Déterminer une matrice inversible $\mathbf{P}$ telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}.$$

PROBLÈME C. Les deux premières parties qui suivent sont indépendantes entre elles, la troisième partie utilise des résultats des parties précédentes.

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x > 0$, on définit les quantités

$$P_N(x) = \prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \qquad \text{et} \qquad I_N(x) = \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

On admettra l'inégalité suivante : pour tout $z > -1$, $\ln(1+z) \leq z$.

Première partie : convergence de la suite $(P_N(x))_{N\in\mathbb{N}^*}$

(1) Pour $x > 0$ fixé, calculer $u_N = -\ln P_N(x)$.
Montrer que la suite u_N converge.

(2) En déduire que pour tout $x > 0$, la suite $(P_N(x))_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive.

On utilisera la notation

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} = \lim_{N\to\infty} P_N(x)$$

pour désigner cette limite.

Deuxième partie : calcul de $I_N(x)$

(3) Montrer que, pour tout $N \geq 1$ et $x > 0$,

$$I_N(x) = N^x \int_0^1 (1-u)^N u^{x-1}\,\mathrm{d}u\,.$$

(4) (a) Calculer $I_1(x)$ pour tout $x > 0$.

(b) Montrer que, pour tout $N \geq 1$, pour tout $x > 0$,

$$I_N(x) = \frac{N^x N!}{x(x+1)\ldots(x+N)}\,.$$

(5) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{I_N(x)} = xP_N(x)\exp\left(x\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln(N)\right]\right)\,.$$

Troisième partie : fonction Gamma

(6) Soit $x > 0$. Montrer que l'intégrale de la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ converge sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$ on définit alors la quantité

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

(7) Montrer que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

(8) Soit f_N la fonction définie sur $[0, N[$ par

$$f_N(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N e^t\,.$$

(a) Montrer que

$$\Gamma(x) - I_N(x) = \int_N^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^N f_N(t) e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

(b) Montrer que $0 \leq f_N(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, N]$.

(c) Soit $\alpha \in\,]0, 1[$. Montrer que $f_N(t) \leq 1 - \exp\big(N(\ln(1-\alpha) + \alpha)\big)$ pour tout $t \in [0, N\alpha]$.

(9) En déduire que, pour tout $\alpha \in\,]0, 1[$,

$$\big|\Gamma(x) - I_N(x)\big| \leq \int_N^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t + \int_{N\alpha}^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t + \big(1 - e^{N(\ln(1-\alpha)+\alpha)}\big)\,\Gamma(x).$$

(10) Montrer que $\lim_{N\to\infty} I_N(x) = \Gamma(x)$.

(11) Montrer que

$$\frac{\big(\Gamma(x)\big)^{-1}}{x \prod_{n=1}^\infty e^{-\frac{x}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)} = \lim_{N\to\infty} \exp\left(x\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln(N)\right]\right).$$

(12) En déduire qu'il existe une constante γ telle que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = x\, e^{\gamma x} \prod_{n=1}^\infty e^{-\frac{x}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$