J. 18 1298

UHCE 854

SESSION 2018

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay (Cachan) – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Les trois problèmes qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix.

$* * *$

Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, on pourra admettre les résultats des questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

$* * *$

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

$* * *$

PROBLÈME A. Les deux parties sont indépendantes entre elles (sauf la question (5)(e) qui utilise des résultats de la partie précédente).

Première partie.

(1) Soit $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : \begin{array}{ccc}]0,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

- (a) Dresser, avec justifications, le tableau de variations de f.
- (b) Représenter sur une figure la courbe représentative de f.
- (c) Montrer que lorsque x tend vers $+\infty$, $x^2 f(x)$ converge vers une constante négative que l'on déterminera.

(2) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

(3) (a) Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ lorsque n tend vers l'infini.

(b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

La limite de la suite (u_n), notée γ, est appelée constante d'Euler.

(4) (a) Montrer que $u_n \leq 1$ pour tout entier $n \geq 1$.

(b) Montrer que $0 < \gamma < 1$.

Deuxième partie. Soit $n \geq 2$ un entier, x un nombre réel et $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n nombres réels différents. Le but de cette partie est d'estimer le temps d'exécution moyen d'un algorithme probabiliste qui détermine si x appartient à E ou non. L'algorithme est le suivant :

— choisir un entier I uniformément au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$;

— comparer a_I et x.

— s'arrêter si $a_I = x$ ou si tous les entiers entre 1 et n ont été choisis au moins une fois. Sinon, on recommence : on choisit un entier J uniformément au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, indépendamment des autres choix, on compare a_J et x, etc.

Nous allons nous intéresser au nombre de choix faits par l'algorithme lorsqu'il s'arrête, d'abord lorsque $x \notin E$ (dans ce cas l'algorithme ne trouve pas x et s'arrête lorsque tous les entiers 1 et n ont été choisis au moins une fois), puis lorsque $x \in E$ (dans ce cas l'algorithme s'arrête quand il trouve x).

(5) On suppose dans cette question que $x \notin E$.

Pour $1 \leq i \leq n$, on note D_i le nombre (aléatoire) de choix faits par l'algorithme lorsque pour la première fois i entiers différents ont été choisis au moins une fois. L'algorithme s'arrête donc après D_n choix (c'est-à-dire lorsque pour la première fois tous les entiers 1 et n ont été choisis au moins une fois).

(a) Que vaut D_1 ?

(b) Justifier que $D_2 - 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{n-1}{n}$.

Pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on pose $T_i = D_{i+1} - D_i$.

(c) Plus généralement, montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, T_i suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

(d) En exprimant D_n en fonction de $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ et de D_1, montrer que

$$\mathbb{E}[D_n] = n\ln(n) + nu_n,$$

où (u_n) est la suite introduite dans la première partie.

(e) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $C > 0$,

$$\mathbb{P}\left(D_n \geq Cn\left(\ln(n) + 1\right)\right) \leq \frac{1}{C}.$$

(f) (application numérique) Trouver une valeur numérique $c > 0$ telle que

$$\mathbb{P}(D_{1000} > c) < 0.05.$$

On pourra utiliser l'encadrement $2.3 < \ln(10) < 2.31$.

(6) On suppose dans cette question que $x \in E$. On note C_n le nombre total (aléatoire) de choix effectués par l'algorithme lorsqu'il s'arrête. Déterminer la loi de C_n ainsi que son espérance.

PROBLÈME B. Les cinq parties qui suivent sont indépendantes entre elles (sauf les questions (12) et (16) qui utilisent des résultats des parties précédentes).

Pour un entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Première partie. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ deux matrices données par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que $A^2 = A$ et que $B^2 = B$.

(2) Déterminer le rang de A ainsi que la dimension du noyau de A.

(3) La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

(4) En notant I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $I_2 - AB$ et que $A + B - AB$ sont inversibles.

$* * *$

Soit $n \geq 2$ un entier. On rappelle qu'un projecteur de $\mathbb{R}^n$ est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u^2 = u$, où u^2 désigne la composée $u \circ u$. On note Id l'application identité entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$.

$* * *$

Deuxième partie. Dans cette partie, on étudie quelques propriétés générales des projecteurs. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un projecteur. On lui associe l'endomorphisme $\hat{u}$ défini par $\hat{u} = \mathsf{Id} - u$.

(5) Montrer que $\hat{u}$ est un projecteur.

(6) Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u - \mathsf{Id})$.
Indication. On pourra écrire $x = x - u(x) + u(x)$.

(7) Montrer que $\operatorname{Ker}(\hat{u}) = \operatorname{Im} u$ et que $\operatorname{Im}(\hat{u}) = \operatorname{Ker} u$.

(8) Montrer que $u + \sqrt{2018} \cdot \mathsf{Id}$ est diagonalisable.

$* * *$

Soient $p, q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ deux projecteurs. Le but de la suite du problème est de démontrer que

$$\begin{aligned} p - q \text{ est inversible} &\iff \mathsf{Id} - p \circ q \text{ et } p + q - p \circ q \text{ sont inversibles} \\ &\iff \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q = \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q = \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

$* * *$

Troisième partie.

(9) On suppose que $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q = \mathbb{R}^n$ et $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q = \mathbb{R}^n$. Montrer que $p - q$ est inversible.

Quatrième partie. On suppose dans cette partie que $p - q$ est inversible.

(10) Montrer que $\mathsf{Id} - p \circ q$ est inversible.
Indication. On pourra prendre $x \in \operatorname{Ker}(\mathsf{Id} - p \circ q)$ et calculer $(p-q)^2(x)$.

(11) Posons $\hat{p} = \mathsf{Id} - p$ et $\hat{q} = \mathsf{Id} - q$. Justifier que $\hat{p} - \hat{q}$ est inversible.

(12) En déduire que $p + q - p \circ q$ est inversible.

Cinquième partie. On suppose dans cette partie que $\mathsf{Id} - p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont inversibles.

(13) Justifier qu'il existe $z \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathsf{Id} = z \circ p + z \circ (\mathsf{Id} - p) \circ q$.

(14) En déduire que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q = \{0\}$.

(15) Montrer que $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q = \mathbb{R}^n$.

(16) Montrer que $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q = \mathbb{R}^n$ et que $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q = \mathbb{R}^n$.

PROBLÈME C. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est à variation lente si :

$$\text{pour tout } c > 0 \text{ on a } \lim_{x\to\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1.$$

Les trois parties qui suivent sont indépendantes entre elles.

Première partie.

(1) Montrer que la fonction ln est à variation lente.

(2) On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to \infty$.
Montrer que f est à variation lente.

(3) On suppose que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$. La fonction f est-elle toujours à variation lente ?

Deuxième partie. On fixe une constante $a > 0$ et une fonction continue $h : [2, \infty[\to \mathbb{R}$ telle que $h(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^1 vérifiant

$$\text{pour tout } x \geq 2, \qquad f(x) = a \exp\left(\int_2^x \frac{h(u)}{u} \mathrm{d}u\right). \qquad [1]$$

(4) Montrer que $h(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$ pour tout $x \geq 2$.

(5) (un exemple)

(a) En s'aidant de la question (4), donner une écriture de $\ln(x)$ sous la forme

$$\ln(x) = a \exp\left(\int_2^x \frac{h(u)}{u} \mathrm{d}u\right) \quad \text{pour} \quad x \geq 2, \qquad [2]$$

avec $a > 0$ et $h : [2, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $h(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$.

(b) Pour quelles valeurs de $x < 2$ peut-on prolonger l'égalité [2] de la question précédente ? Justifier votre réponse.

(6) On revient au cas d'une fonction f générale de la forme [1] donnée au début de cette partie.

(a) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ fixé, il existe une constante $C > 0$ telle que $f(x) \leq Cx^\epsilon$ pour tout $x \geq 2$.
Indication. On pourra fixer $M > 0$ tel que $|h(u)| \leq \epsilon$ pour tout $x \geq M$, et couper l'intégrale en deux.

(b) Montrer que pour tout $c > 0$, $\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} du \to 0$ lorsque $x \to \infty$.

(c) Montrer que f est à variation lente.

Troisième partie. Soit X une variable aléatoire réelle à support dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que sa fonction de répartition est continue. On pose $\overline{F}(u) = \mathbb{P}(X \geq u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

(7) Justifier que $\overline{F}$ est continue.

(8) (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe un nombre réel $a_n \geq 0$ tel que $\overline{F}(a_n) = \frac{1}{n}$.

(b) On suppose, uniquement dans cette question, que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la valeur de a_n.

(c) On suppose que X admet une espérance. Montrer que $\mathbb{E}[X] \geq \frac{a_n}{n}$.

(d) On suppose que $\frac{a_n}{n} \to \infty$ quand $n \to \infty$. Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Afin de modéliser des phénomènes aléatoires extrêmes, on suppose à présent qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ et une fonction à variation lente g tels que $\overline{F}(u) = \frac{g(u)}{u^\alpha}$ pour tout $u > 0$. On suppose également que $a_n \to \infty$.

(9) Montrer que pour tout $u > 0$, $\mathbb{P}(X \geq ua_n) \sim \frac{1}{u^\alpha n}$ lorsque $n \to \infty$.

(10) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Déterminer, pour $u > 0$ fixé, la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{a_n} \geq u\right).$$