Sujet de mathématique de l'E.N.S lettres et sciences sociales B/L 2014.

Durée : 4 heures.
Calculatrice interdite.

Les trois exercices qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat.

Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes, du moment qu'il l'aura clairement indiqué.

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Il sera fait grand cas lors de la correction de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

I Exercice.

Pour tout entier $n \geq 2$ on note F_n la matrice à $n+1$ lignes et $n-1$ colonnes telle que, pour tout k, la k-ième colonne a tous ses coefficients nuls sauf le k-ième et le $(k+2)$-ième qui valent 1. Ainsi

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de F_3 dans $\mathbb{R}^4$.

   Déterminons $\mathrm{rg}(F_3)$.

   Le rang d'une matrice est inférieur au minimum de son nombre de ligne et de colonne. Donc ici
   $$\mathrm{rg}(F_3) \leq 2.$$
   Comme les deux premières lignes de F_3 sont des vecteurs libres (matrice échelonnée, ou triangulaire) nous pouvons affirmer que
   $$\mathrm{rg}(F_3) \geq 2.$$
   Finalement
   $$\boxed{\mathrm{rg}(F_3) = 2.}$$

2. Déterminer pour n quelconque le rang de F_n dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

   Déterminons $\mathrm{rg}(F_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

   Soit $n \geq$ un entier naturel.

   * F_n est formée de $n-1$ colonnes et de $n+1$ lignes donc

   $$\mathrm{rg}(F_n) \leq n-1.$$

   * Démontrons que les $n-1$ colonnes de F_n, C_1, ..., C_{n-1}, forment une famille libre.
   Nous devons donc établir, par définition d'une famille libre, que

   $$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0.$$

   Il s'agit d'une propriété universelle. Pour la démontrer nous "fixons" un choix de coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$.
   Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$.
   Pour démontrer que l'implication est vraie je suppose que la prémisse de l'implication est vrai et nous démontrerons qu'alors forcément le second prédicat est vrai.
   Supposons que : $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0$. Démontrons que (forcément) : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

   $$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0$$

   équivaut successivement à

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{n-3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{n-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1+\lambda_3 \\ \lambda_2+\lambda_4 \\ \lambda_3+\lambda_5 \\ \vdots \\ \lambda_{n-7}+\lambda_{n-5} \\ \lambda_{n-6}+\lambda_{n-4} \\ \lambda_{n-5}+\lambda_{n-3} \\ \lambda_{n-2} \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

Comme ici 0 désigne le zéro de $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1+\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2+\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_3+\lambda_5 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-7}+\lambda_{n-5} & = & 0 \\ \lambda_{n-6}+\lambda_{n-4} & = & 0 \\ \lambda_{n-5}+\lambda_{n-3} & = & 0 \\ \lambda_{n-2} & = & 0 \\ \lambda_{n-1} & = & 0 \end{array}\right. = 0$$

En résolvant de proche en proche nous obtenons : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

Nous avons donc démontré que $C_1, \ldots, C_{n-1}$ forment une famille libre.
Par conséquent : $\mathrm{rg}(f) \geq n-1$.

* Des deux inégalités précédentes nous concluons :

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = n-1.}$$

3. Pour tout $n \geq 2$, soit G_n la matrice à $n-1$ lignes et $n+1$ colonnes telles que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, la k-ième ligne de G_n est nulle sauf le coefficient k qui vaut $(n-k+1)(n-k)$ et le coefficient $k+2$ qui vaut $k(k+1)$. Ainsi

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ G_3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \ G_4 = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

$$G_n = \begin{pmatrix} n(n-1) & 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & (n-1)(n-2) & 0 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 6 & 0 & (n-1)(n-2) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 0 & n(n-1) \end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau de G_3.

Déterminons le noyau de G_3.

Plutôt que de chercher à résoudre un système, nous allons rechercher une base e $\mathbb{R}^4$ dans laquelle le noyau et l'image sont aisément accessibles.

$$\left(\begin{array}{cccc} 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - \frac{1}{3}C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1 \end{array}$$

Finalement

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{Ker}(G_3) \text{ est le sous-}\mathbb{R}\text{-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4 \text{ dont} \\ \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base.} \end{array}}$$

4. Déterminer, pour n quelconque, la dimension de $\mathrm{Ker}(G_n)$.

5. Écrire la matrice $M_n = G_n F_n$. Préciser en particulier le nombre de lignes et de colonnes de M_n.

6. Montrer que M_n a même rang qu'une matrice triangulaire supérieure telle que, pour tout k, le k-ième terme diagonal vaut $(n-k+1)(n-k)(1-\epsilon_k)+k(k+1)$, avec, pour tout k, $0 \leqslant \epsilon_k < 1$.
   En déduire que M_n est inversible.
   Indication : appliquer l'algorithme du pivot de Gauss et procéder par récurrence sur les colonnes.

7. Montrer que $\mathbb{R}^{n+1} = \mathrm{Im}(F_n) \oplus \mathrm{Ker}(G_n)$.

II Exercice : théorème de Weierstrass.

Dans cet exercice, on considère la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos(\pi t)\mathrm{e}^{-\pi t} \end{array} \right. .$$

Préliminaires.

1. Donner le tableau de variation de la fonction f et représenter son graphe sur l'intervalle $[0,1]$.

2. Montrer que
$$\forall (t,u) \in [0,1]^2,\ |f(t)-f(u)| \leqslant M|t-u|,$$
pour une constante numérique M que l'on précisera.

3. *Erratum : question à ne pas faire.*
   Soit Y une variable aléatoire positive ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, montrer que
$$\forall y > 0,\ \mathbb{E}[Y] \geqslant y\mathbb{P}(Y \geqslant y).$$
   Indication : on pourra écrire $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{Y<y}] + \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{Y\geqslant y}]$. *On rappelle que* $\mathbf{1}_{Y<y}$ *est la variable aléatoire qui vaut 1 si* $Y < y$ *et 0 sinon, ainsi on a toujours* $\mathbf{1}_{Y\geqslant y} = 1$.

Partie 1.

Soit Q_n ma fonction définie par

$$Q_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k} \end{array} \right. .$$

Soit $p \in [0,1]$ et $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées (iid) de loi $\mathcal{B}(p)$.

4. Donner la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Donner son espérance et sa variance.

5. On note $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$, montrer que

$$\mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right) \leqslant \frac{1}{4n}.$$

6. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[f\left(\overline{X}_n\right)\right] = Q_n(p).$$

7. Montrer que

$$Q_n(p) - f(p) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Partie 2.

Soit $\epsilon > 0$, on note A_1 l'ensemble des entiers $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ tels que $\left|p - \frac{k}{n}\right| < \frac{\epsilon}{M}$ et A_2 l'ensemble des entiers $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ tels que $\left|p - \frac{k}{n}\right| \geqslant \frac{\epsilon}{M}$. On a donc $Q_n(p) - f(p) = S_1(p) - S_2(p)$, où

$$\forall i \in \{1,2\},\ S_i = \sum_{k \in A_i} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

8. Montrer que, pour tout $k \in A_1$, $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right| \leqslant \epsilon$, en déduire que $|S_1| \leqslant \epsilon$.

9. Montrer que $|S_2| \leqslant M\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \frac{\epsilon}{M}\right)$.

10. Montrer que

$$\forall p \in [0,1],\ \lim_{n\to+\infty} Q_n(p) = f(p).$$

11. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \frac{\epsilon}{M}\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right)}{\left(\frac{\epsilon}{M}\right)^2}.$$

Indication : on admettra que, pour toute variable aléatoire Y admettant une variance,

$$\forall y > 0,\ \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| > y) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(Y)}{y^2}.$$

12. Montrer que

$$\forall p \in [0{,}1],\ |Q_n(p) - f(p)| \leqslant C\frac{M}{n^13},$$

pour une constante numérique C que l'on précisera.

13. Le théorème de Weierstrass affirme que, pour toute fonction g continue sur $[0{,}1]$, il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de polynômes telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} -g(x) - P_n(x)| = 0.$$

Montrer que le théorème de Weierstrass est vérifié dans le cas où g est une fonction de classe $\mathcal{C}_1$ quelconque.

III Exercice.

Dans cet exercice, $\alpha \in]0, +\infty[\backslash\mathbb{N}$ désigne un nombre réel positif non-entier et f est la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array} \right. .$$

1. Montrer que f est une fonction infiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

2. Donner, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une expression de la dérivée k-ième de f, $f^{(k)}$.

3. On définit la fonction

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & f(x+1) - f(x) \end{array} \right. .$$

Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $x_1 \in [x,x+1]$ tel que $f_1(x) = f'(x)$.

4. Pour toute fonction g définie sur $]0, +\infty[$ et infiniment dérivable sur cet intervalle, on définit récursivement les fonctions $(g_k)_{k\geqslant 0}$ sur $]0, +\infty[$ comme suit

$$\begin{aligned} g_0(x) &= g(x) \\ g_{k+1}(x) &= g_k(x+1) - g_k(x). \end{aligned}$$

(a) Montrer que, pour tout entier k, la dérivée de g_k est égale à $(g')_k$.
Indication : on pourra utiliser une récurrence.

(b) On note $g^{(k)}$ la dérivée k-ième de g. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, pour toute fonction g et tout réel $x > 0$, il existe $x_k \in [x,x+k]$ tel que

$$g_k(x) = g^{(k)}(x_k).$$

5. On suppose dans cette question que n^α est un entier pour tout n.

(a) Soit k une entier tel que $\alpha \in]k-1,k[$. Montrer que, pour tout entier n,

$$f_k(n) > 0 \quad \text{et} \quad f_{k+1}(n) < 0.$$

(b) Montrer que u_n est une suite strictement décroissante d'entiers naturels.

(c) Soit β un réel. Montrer que $\beta \in \mathbb{N}$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^\beta \in \mathbb{N}$.