# BCE ENS B/L 2022.

*Ce corrigé n'est pas officiel.*

## Exercice 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n$ et $h_n$ respectivement, les fonctions définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall x > -1,\ f_n(x) = x^n \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \forall x > -1,\ h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

1. Dressez le tableau de variation de la fonction $h_n$ sur son ensemble de définition.

   Étudions, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de $h_n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   * Calcul de la fonction dérivée.
   $p : x \mapsto n\ln(1+x)$ et $q : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ sont dérivables sur $]-1,+\infty[$ donc $h_n$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
   De plus pour $x \in ]-1,+\infty[$ en dérivant la fonction composée :

   $$p'(x) = n \times \frac{1}{1+x} \times 1$$

   et en dérivant le quotient :

   $$q'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

   Donc :

   $$\forall x \in ]-1,+\infty[,\ h_n'(x) = \frac{n}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

   * Étude du signe de la fonction dérivée.
   On remarque que, pour $x \in ]-1,+\infty[$,

   $$h_n'(x) = \frac{nx+n+1}{(x+1)^2}.$$

   Puisque $(x+1)^2 > 0$ pour $x \in ]-1,+\infty[$, $h_n'$ est du signe de la fonction affine $x \mapsto nx+n+1$.

* Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition : $+\infty$.

$\frac{x}{1+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ donc

$$h_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

* Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition : $-1$.

On remarque que pour tout $x \in ]-1, +\infty[$,

$$h_n(x) = x\left(n\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{1+x}\right).$$

Or

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{\substack{x\to-1\\x>-1}}{\longrightarrow} +\infty$$

et

$$\frac{1}{1+x} \underset{\substack{x\to-1\\x>-1}}{\longrightarrow} +\infty$$

donc

$$h_n(x) \underset{\substack{x\to-1\\x>-1}}{\longrightarrow} -\infty$$

* Finalement

| $x$ | $-1$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'$ | $\Vert$ $\quad$ $+$ |
| $f$ | $\Vert$ $-\infty \nearrow +\infty$ |

2. (a) Montrer que l'équation $h_n(x) = 0$ d'inconnue $x$, admet sur $]-1, +\infty[$ une unique solution $x_0$ que l'on déterminera.

$h_n$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$, donc$h_n$ réalise une bijection de $]-1; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

$$\boxed{h_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans } ]-1, +\infty[.}$$

De plus clairement $h_n(0) = 0$. Finalement

$$\boxed{h_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans } ]-1,+\infty[ \text{ qui est } 0.}$$

(b) En déduire le signe de la fonction $h_n$ sur $]-1,+\infty[$.

$h_n$ est strictement croissante et s'annule en 0 donc

$$\boxed{h_n(x) \text{ est du signe de } x.}$$

3. *Dans cette question, on étudie le cas particulier où $n = 1$.*

   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f_1$ sur son ensemble de définition.

   (b) Préciser les limites de $f_1$ aux bornes de son ensemble de définition.

4. *Dans cette question, on étudie le cas général où $n \geqslant 2$.*

   (a) On note $f_n'$ la dérivée de la fonction $f_n$.
   Exprimer pour tout $x > -1$, $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.

   (b) En distinguant les cas $n$ impair et $n$ pair, en déduire les variations de la fonction $f_n$ sur $]-1,+\infty[$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (a) Montrer qu'il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera tel que :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{x^2}{1+x} = ax + b + \frac{c}{1+x}.$$

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2) - \frac{1}{2}$. En déduire la valeur de $u_1$.

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle converge.

(d) Établir l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6. pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

(a) Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

(b) En déduire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, \mathrm{d}x.$$

(c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

## Exercice 2.