HEC Audencia ESSEC 2017 épreuve à option BL.

I Exercice.

II Exercice.

III Exercice.

Partie 1.

Dans cette partie on note E l'ensemble $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, c'est-à-dire l'ensemble des réels non entiers.

On rappelle les deux développements limités au voisinage de 0 suivants :

$$\sin u = u + \mathrm{o}(u^2)$$

et

$$1 - \cos u = \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2).$$

1. Pour tout $a \in E$, soit Φ_a la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\Phi_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(2ax) - 1}{\sin x} & \text{si } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

   (a) Montrer que la fonction Φ_a est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que la fonction Φ_a' est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (b) Montrer que la fonction Φ_a est dérivable en 0 et que $\Phi_a'(0) = -2a^2$.

   (c) Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, calculer $\Phi_a'(x)$ et déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \Phi_a'(x)$.

   (d) En déduire que la fonction Φ_a' est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$\forall a \in E,\ \Gamma_n(a) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_a(t) \sin\left((2n+1)t\right)\, \mathrm{d}t.$$

   À l'aide d'une intégration par parties, établir l'existence d'un réel $\mu > 0$ tel que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\Gamma_n(a) \leqslant \dfrac{\mu}{n}$. En déduire la limite de $\Gamma_n(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.