HEC Audencia ESSEC 2017 épreuve à option BL.

I Exercice.

II Exercice.

III Exercice.

Partie 1.

Dans cette partie on note E l'ensemble $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, c'est-à-dire l'ensemble des réels non entiers.

On rappelle les deux développements limités au voisinage de 0 suivants :

$$\sin u = u + \mathrm{o}(u^2)$$

et

$$1 - \cos u = \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2).$$

1. Pour tout $a \in E$, soit Φ_a la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\Phi_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(2ax) - 1}{\sin x} & \text{si } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

   (a) Montrer que la fonction Φ_a est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que la fonction Φ_a' est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ Φ_a est un quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule qu'en 0 (car $a \in E$), par conséquent Φ_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   $$\boxed{\Phi_a \text{ et continue et dérivable sur } \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ et } \Phi_a' \text{ est continue sur } \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right].}$$

   Il nous reste à montrer que Φ_a est continue en 0.

   Montrons que : $\Phi_a \xrightarrow[0^+]{} \Phi_a(0)$.

En utilisant les développements limités rappelés par l'énoncé :

$$\Phi_a(x) = -\frac{\frac{(2au)^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)}{u + \mathrm{o}(u^2)}.$$

En procédant à la division euclidienne des polynômes suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 2 : $4a^2u^2 = u \times (4a^2u) + 0$. Donc :

$$\Phi_a(x) = -4a^2u + \mathrm{o}(u^2).$$

D'où : $\Phi_a \underset{0^+}{\longrightarrow} 0 = \Phi_a(0)$.

Φ_a est continue en 0.

(b) Montrer que la fonction Φ_a est dérivable en 0 et que $\Phi'_a(0) = -2a^2$.

Il s'agit d'une dérivabilité locale (en 0^+), nous allons donc vérifier l'existence d'un nombre dérivé en 0^+ en déterminant l'éventuelle limite du taux d'accroissement.

Notons $\tau_{\Phi_a}(0,x)$ le taux d'accroissement de Phi_a entre 0 et $0 + x$ pour $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Démontrons que $\tau_{\Phi_a}(0,x)$ admet une limite en 0^+.

Soit $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
\tau_{\Phi_a}(0,x) &= \frac{\Phi_a(0+x) - \Phi_a(0)}{(0+x) - 0} \\
&= \frac{\frac{\cos(2ax)-1}{\sin x} - 0}{x} \\
&= \frac{\cos(2ax) - 1}{x \sin x}
\end{aligned}$$

En utlisant le développements limités comme à la question précédente :

$$\begin{aligned}
\tau_{\Phi_a}(0,x) &= -\frac{\frac{(2ax)^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)}{x\,(x + \mathrm{o}(x^2))} \\
&= -2a^2 + \mathrm{o}(x^2)
\end{aligned}$$

Φ_a et dérivable en 0 et $\Phi'_a(0) = -2a^2$.

(c) Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, calculer $\Phi'_a(x)$ et déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'_a(x)$.

Calculons Φ'_a.

D'après la question 1.(a) Φ_a est bien dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
En remarquant que Φ_a est un quotient de fonctions :

$$\boxed{\Phi'_a(x) = \frac{-2a\sin(2ax)\sin(x) - [\cos(2ax)-1]\cos(x)}{(\sin x)^2} \text{ quelque soit } x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right].}$$

Déterminons $\lim_{x\to 0^+} \Phi'_a(x)$.

En utilisant les développements limités :

$$\Phi'_a(x) = \frac{-2a\left(2ax + o(x^2)\right)\left(x + o(x^2)\right) + \left[\frac{(2ax)^2}{2} + o(x^2)\right]\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\left(x + o(x^2)\right)^2}.$$

$$\begin{aligned}\Phi'_a(x) &= \frac{-4a^2x^2 + 2a^2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \\ &= -2a^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

(d) En déduire que la fonction Φ'_a est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Justifions la continuité de Φ'_a.

Nous avons déjà remarqué que Φ'_a est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
D'après la question précédente, quelque soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\Phi'_a(x) = \frac{-2a\sin(2ax)\sin(x) - [\cos(2ax)-1]\cos(x)}{(\sin x)^2}$$

D'après la question 1.(b) $\Phi'_a(0) = -2a^2$ et nous avons démontré à la question précédente que $\lim_{x\to 0^+} \Phi'_a(x) = -2a^2$, donc Φ'_a est continue en 0.
Finalement :

$$\boxed{\Phi'_a \text{ est continue sur } \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].}$$

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$\forall a \in E,\, \Gamma_n(a) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_a(t)\sin\left((2n+1)t\right)\, \mathrm{d}t.$$

À l'aide d'une intégration par parties, établir l'existence d'un réel $\mu > 0$ tel que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $|\Gamma_n(a)| \leqslant \dfrac{\mu}{n}$. En déduire la limite de $\Gamma_n(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Soient $n \in \mathbf{N}$ et $a \in E$.

Procédons à une intégration par parties sur $\Gamma_n(a)$.

Φ_a est de classe $\mathcal{C}^1$, d'après la question 1, et $t \mapsto \sin\left((2n+1)t\right)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, nous pouvons donc procéder à l'intégration par parties :

$$\Gamma_n(a) = 2\left[\Phi_a(t)\frac{-\cos\left((2n+1)t\right)}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_a'(t)\frac{-\cos\left((2n+1)t\right)}{2n+1}\, \mathrm{d}t$$

Or $\Phi_a(0) = 0$ et $\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc :

$$\boxed{\Gamma_n(a) = \tfrac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_a'(t)\cos\left((2n+1)t\right)\, \mathrm{d}t.}$$

Déterminons une majoration de $|\Gamma_n(a)|$.

Utilisons le résultat de la précédente intégration par parties :

$$|\Gamma_n(a)| \leqslant \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\Phi_a'(t)\cos\left((2n+1)t\right)\right| \mathrm{d}t$$

Puisque $\left|\cos\left((2n+1)t\right)\right| \leqslant 1$

$$|\Gamma_n(a)| \leqslant \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\Phi_a'(t)|\, \mathrm{d}t$$

Φ_a étant continue elle est bornée (et non identiquement nulle) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, autrement dit il existe $\eta_a \in \mathbf{R}_+^*$ tel que :

$$\begin{aligned} |\Gamma_n(a)| &\leqslant \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_a\, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\eta \end{aligned}$$

En notant $\mu_a = \eta_a \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}|\Gamma_n(a)| &\leqslant \frac{2}{2n+1}\mu_a \\ &\leqslant \frac{2}{2n}\mu_a \\ &\leqslant \frac{\mu_a}{n}\end{aligned}$$

Ainsi, étant donné $a \in E$, il existe $\mu_a \in \mathbf{R}_+^*$ tel que, quelque soit $n \in \mathbf{N}$, $|\Gamma_n(a)| \leqslant \frac{\mu_a}{n}$.

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ nous en déduisons

pour chaque $a \in E$, $\Gamma_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Pour tout $a \in E$, soit $(I_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ les deux suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+k}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{a-k}.$$

(a) On rappelle que : $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\cos u \times \cos v = \frac{1}{2}\left(\cos(u+v) + \cos(u-v)\right)$.
Établir pour tout $a \in E$ et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la relation :

$$\Gamma_k(a) - \Gamma_{k-1}(a) = (-1)^k \sin(\pi a)\left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k}\right).$$

Soient $a \in E$ et $k \in \mathbf{N}^*$.

Calculons $\Gamma_k(a) - \Gamma_{k-1}(a)$.

Par linéarité de l'intégrale :

$$\Gamma_k(a) - \Gamma_{k-1}(a) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_a(t)\left[\sin\left((2k+1)t\right) - \sin\left((2k-1)t\right)\right]\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la formule fournie par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
&\sin\left((2k+1)t\right) - \sin\left((2k-1)t\right)\\
&= 2\sin\left(\frac{(2k+1)t-(2k-1)t}{2}\right)\cos\left(\frac{(2k+1)t+(2k-1)t}{2}\right)\\
&= 2\sin(t)\cos(2kt)
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\Gamma_k(a) - \Gamma_{k-1}(a) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_a(t) 2\sin(t)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la formule de Φ_a :

$$\begin{aligned}
\Gamma_k(a) - \Gamma_{k-1}(a) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2at)-1}{\sin t}\sin(t)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos(2at)-1\right]\cos(2kt)\,\mathrm{d}t\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2at)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Comme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2k}\sin(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$,

$$\Gamma_k(a) - \Gamma_{k-1}(a) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2at)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la formule donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\Gamma_k(a) - \Gamma_{k-1}(a) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\cos(2at+2kt)+\cos(2at-2kt)\right)\ \mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(a+k)t)+\cos(2(a-k)t)\ \mathrm{d}t \\
&= 2\left[\frac{\sin(2(a+k)t)}{2(a+k)}+\frac{\sin(2(a-k)t)}{2(a-k)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(2(a+k)\frac{\pi}{2}\right)}{a+k}+\frac{\sin\left(2(a-k)\frac{\pi}{2}\right)}{a-k} \\
&= \frac{\sin\left(a\pi+k\pi\right)}{a+k}+\frac{\sin\left(a\pi+k\pi\right)}{a-k} \\
&= \frac{(-1)^k\sin\left(a\pi\right)}{a+k}+\frac{(-1)^k\sin\left(a\pi\right)}{a-k} \\
&= \left(\frac{1}{a+k}+\frac{1}{a-k}\right)(-1)^k\sin\left(a\pi\right)
\end{aligned}$$

Quelque soient $a \in E$ et $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\Gamma_k(a) - \Gamma_{k-1}(a) = \left(\frac{1}{a+k}+\frac{1}{a-k}\right)(-1)^k\sin\left(a\pi\right).$$

(b) Calculez $\Gamma_0(a)$.

Soit $a \in E$.

Calculons $\Gamma_0(a)$.

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(a) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_a(t)\sin t\ \mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2at)-1}{\sin x}\cdot\sin t\ \mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2at)\ \mathrm{d}t \\
&= 2\left[\frac{1}{2a}\sin(2at)-t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{a}\sin(a\pi)-\pi
\end{aligned}$$

Quelque soit $a \in E$, $\Gamma_0(a) = \frac{1}{a}\sin(a\pi) - \pi$.

(c) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $a \in E$, l'égalité :

$$\frac{\Gamma_n(a)}{\sin(\pi a)} = I_n(a) + J_n(a) - \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Soit $a \in E$.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$ notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\frac{\Gamma_n(a)}{\sin(\pi a)} = I_n(a) + J_n(a) - \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$ ».

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

* D'après la question 3.(b) :

$$\Gamma_1(a) = \Gamma_0(a) + \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}\right)(-1)^k \sin(a\pi)$$

Donc :

$$\frac{\Gamma_1(a)}{\sin(a\pi)} = \frac{\Gamma_0(a)}{\sin(a\pi)} + \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}\right)(-1)^1$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_1(a)}{\sin(a\pi)} &= \frac{\frac{1}{a}\sin(a\pi) - \pi}{\sin(a\pi)} - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}\right) \\ &= \frac{1}{a} - \frac{\pi}{\sin(a\pi)} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} \\ &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right) + \left(-\frac{1}{a-1}\right) - \frac{\pi}{\sin(a\pi)} \\ &= I_1(a) + J_1(a) - \frac{\pi}{\sin(a\pi)}\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie est démontrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
D'après la question 3.(a) :

$$\Gamma_{n+1}(a) = \Gamma_n(a) + \left(\frac{1}{a+n+1} + \frac{1}{a-n+1}\right)(-1)^{n+1}\sin(a\pi)$$

Donc :

$$\frac{\Gamma_{n+1}(a)}{\sin(a\pi)} = \frac{\Gamma_n(a)}{\sin(\pi a)} + \frac{(-1)^{n+1}}{a+n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{a-n+1}$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_{n+1}(a)}{\sin(a\pi)} &= I_n(a) + J_n(a) - \frac{\pi}{\sin(\pi a)} + \frac{(-1)^{n+1}}{a+n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{a-n+1}\\ &= \left(I_n(a) + \frac{(-1)^{n+1}}{a+n+1}\right) + \left(J_n(a) + \frac{(-1)^{n+1}}{a-n+1}\right) - \frac{\pi}{\sin(\pi a)}\\ &= I_{n+1}(a) + J_{n+1}(a) - \frac{\pi}{\sin(\pi a)}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \ mathbf{N}^*$ que, pour tout $a \in E$, $\frac{\Gamma_n(a)}{\sin(\pi a)} = I_n(a) + J_n(a) - \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$.

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = (-1)^n \dfrac{2a}{a^2 - n^2}$.

   (a) Montrer que pour tout $a \in E$, la série de terme général u_n est convergente.

   (b) Établir la relation : $\forall a \in E$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2a}{a^2-n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}$.

Partie 2.

5. Pour tout $a \in]0,1[$, on pose pour tout $t \in]0,1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k+a-1}$$

et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \beta_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} t^{k-a-1}.$$

(a) Vérifier que $\alpha_n(t) - \dfrac{t^{a-1}}{1+t} = \dfrac{(-1)^n t^{a+n}}{1+t}$ et que $\beta_n(t) - \dfrac{t^{-a}}{1+t} = \dfrac{(-1)^{n+1} t^{n-a}}{1+t}$.

(b) Établir la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \alpha_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \beta_n(t)\,\mathrm{d}t$ et établir leurs valeurs respectives en fonction de $I_n(a)$ et $J_n(a)$.

6. (a) Montrer que pour tour $a \in]0,1[$, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^a}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-a}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

On pose alors : $\forall a \in]0,1[,\ A(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $B(a) = \displaystyle\int 0^1 \frac{t^{-a}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

(b) Établir l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a)$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a) = A(a)$. De même, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n(a)$.

(c) Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, on a : $A(a) + B(a) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}$.

(d) Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}$.

(e) Montrer que pour tout réel $\theta > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\theta}\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur en fonction de θ (on pourra utiliser le changement de variable $u = t^\theta$).