BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 338

Conception : HEC Paris

———

Filière Littéraire

Programme ENS B/L

Jeudi 27 avril 2017, de 14 h. à 18 h.

———

OPTIONS :

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets :

- MATHÉMATIQUES

- SCIENCES SOCIALES *

** Conception en collaboration avec AUDENCIA*

Tournez la page S.V.P.

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : HEC Paris

MATHÉMATIQUES

Programme ENS B/L

Jeudi 27 avril 2017, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Sous réserve d'existence, on note $E(B)$ *et* $V(B)$ *respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire* B.

Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. On pose : $q = 1 - p$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{R}(p)$ si :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad P\big([X = 1]\big) = p \text{ et } P\big([X = -1]\big) = q\,.$$

Soit $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{R}(p)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la variable aléatoire T_n par : $T_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} X_k$.

1. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$.

2.a) Préciser $T_n(\Omega)$. Calculer $E(T_n)$ et en déduire la loi de T_n.

b) Pour tout couple $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, avec $n > m$, calculer la covariance $\mathrm{Cov}(T_n, T_m)$ de T_n et T_m.

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $p_n = P\big([T_n = 1]\big)$.

Établir la relation : $\forall n \in \mathbf{N},\ p_{n+1} = (2p - 1)\,p_n + (1 - p)$ et retrouver ainsi la loi de T_n.

4. On suppose dans *cette question uniquement* que $p = \dfrac{1}{2}\cdot$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit W_n, Z_n et Y_n les variables aléatoires définies par :

$$W_n = X_n\, X_{n-1}, \;\; Z_n = \sum_{k=1}^{n} W_k \;\text{ et }\; Y_n = \frac{1}{2}\, W_n + \frac{1}{2}\cdot$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}\cdot$

b) Montrer que deux variables aléatoires qui suivent toutes les deux une loi de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont indépendantes.

d) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer Z_n en fonction de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ et en déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la valeur de $P\big([Z_n = 2k - n]\big)$ en fonction de k et n.

5. Soit K une variable aléatoire indépendante de $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On pose pour tout $\omega \in \Omega$: $T(\omega) = \displaystyle\prod_{k=0}^{K(\omega)} X_k(\omega)$. *On admet* que T est une variable aléatoire.

a) Montrer que la série de terme général $E(T_n)P\big([K = n]\big)$ converge et que $E(T) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} E(T_n)P\big([K = n]\big)$.

b) Calculer $E(T)$ et déterminer la loi de T.

6. Soit H une variable aléatoire indépendante de $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit D_k la variable aléatoire définie par : $D_k = HX_k$.

a) Calculer la fonction de répartition F_k de D_k.

b) En déduire que D_k est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_k de D_k.

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, E est un espace vectoriel de dimension finie et E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E vérifiant $E = E_1 \oplus E_2$.

Pour tout vecteur x (respectivement y) de E, l'écriture $x = x_1 + x_2$ (respectivement $y = y_1 + y_2$) représente la décomposition de x (respectivement y) sur $E_1 \oplus E_2$, avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ (respectivement $(y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$).

Partie 1

On suppose dans cette partie que f est un endomorphisme de E_1 et qu'il existe un isomorphisme h de E_1 dans E_2.

Soit G l'endomorphisme de E qui à tout vecteur x de E s'écrivant $x = x_1 + x_2$, associe le vecteur $G(x)$ défini par : $G(x) = h^{-1}(x_2) + h(x_1) + f(x_1)$, où h^{-1} est l'isomorphisme réciproque de h.

1. Montrer que G est injectif.

2. Justifier que G est surjectif et donner pour tout vecteur $y = y_1 + y_2$, l'expression de $G^{-1}(y)$.

3. On suppose que G admet une valeur propre réelle λ et on note $x = x_1 + x_2$ un vecteur propre associé.

a) Justifier que le réel λ est non nul.

b) Montrer que x_1 et x_2 sont non nuls.

c) Montrer que x_1 est un vecteur propre de f et donner en fonction de λ, la valeur propre associée.

4. On suppose que f admet une valeur propre réelle μ associée au vecteur propre x_1.

Déterminer en fonction de μ une valeur propre de G et donner en fonction de x_1, un vecteur propre associé.

5. On suppose dans cette question que $E = \mathbf{R}_5[X]$, E_1 est le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes impairs et E_2 le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes pairs.
   On pose : $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$, $\mathcal{B}_1 = (X, X^3, X^5)$ et $\mathcal{B}_2 = (1, X^2, X^4)$.
   Soit h et f les applications définies sur E_1 par :

$$\forall P \in E_1,\ \big(h(P)\big)(X) = 5XP(X) - (X^2-1)P'(X) \ \text{ et } \ \big(f(P)\big)(X) = (X^2+1)P''(X) - 2XP'(X).$$

   a) Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E et que $\mathcal{B}_1$ (respectivement $\mathcal{B}_2$) est une base de E_1 (respectivement E_2).
   b) Vérifier que h est une application linéaire de E_1 dans E_2 et déterminer la matrice de h relativement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Montrer que h est un isomorphisme et donner la matrice de h^{-1}.
   c) Montrer que f est un endomorphisme de E_1 et donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
   d) Quelles sont les valeurs propres de f ?
   e) À l'aide des questions précédentes, déterminer une valeur propre de G et un vecteur propre associé.

Partie 2

Dans cette partie, on note p une application linéaire de E_1 dans E_2 et q une application linéaire de E_2 dans E_1. Soit φ l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $x = x_1 + x_2$, associe le vecteur $\varphi(x)$ tel que : $\varphi(x) = p(x_1) + q(x_2)$.

6. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q)$.
7. On suppose que φ admet une valeur propre réelle $\lambda \neq 0$ et on note $x = x_1 + x_2$ un vecteur propre associé.
   a) Montrer que x_1 et x_2 sont non nuls.
   b) Montrer que λ^2 est une valeur propre de $p \circ q$ et de $q \circ p$ et déterminer des vecteurs propres associés.
8. On suppose dans cette question que les espaces E, E_1 et E_2 sont ceux définis à la question 5.
   Les applications linéaires p et q sont définies par :

$$\forall R \in E_1,\ \big(p(R)\big)(X) = (X^3+X)R''(X) - (4X^2+2)R'(X) \ \text{ et } \ \forall R \in E_2,\ \big(q(R)\big)(X) = XR''(X) - (X^2+1)R'(X).$$

   a) Donner la matrice A de p relativement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et la matrice B de q relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$.
   b) Déterminer $\mathrm{Ker}(p)$, $\mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   c) Calculer le produit matriciel AB et en déduire que 0 est la seule valeur propre réelle de φ.

EXERCICE 3

Partie 1

Dans cette partie, on note E l'ensemble $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$, c'est-à-dire l'ensemble des réels non entiers.

On rappelle les deux développements limités au voisinage de 0 suivants : $\sin u = u + \mathrm{o}(u^2)$ et $1 - \cos u = \dfrac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$.

1. Pour tout $a \in E$, soit Φ_a la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\Phi_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(2ax) - 1}{\sin x} & \text{si } 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
   a) Montrer que la fonction Φ_a est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que la fonction Φ_a' est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   b) Montrer que la fonction Φ_a est dérivable en 0 et que $\Phi_a'(0) = -2a^2$.
   c) Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, calculer $\Phi_a'(x)$ et déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \Phi_a'(x)$.
   d) En déduire que la fonction Φ_a' est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $\forall a \in E, \ \Gamma_n(a) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_a(t) \sin\big((2n+1)t\big)\, dt$.

À l'aide d'une intégration par parties, établir l'existence d'un réel $\mu > 0$ tel que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $|\Gamma_n(a)| \leqslant \dfrac{\mu}{n} \cdot$ En déduire la limite de $\Gamma_n(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout $a \in E$, soit $\big(I_n(a)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\big(J_n(a)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ les deux suites définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ I_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+k} \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbf{N}^*, \ J_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{a-k} \cdot$$

a) On rappelle que : $\sin p - \sin q = 2\sin\big(\frac{p-q}{2}\big) \times \cos\big(\frac{p+q}{2}\big)$ et $\cos u \times \cos v = \frac{1}{2}\big(\cos(u+v) + \cos(u-v)\big)$.

Établir pour tout $a \in E$ et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la relation : $\Gamma_k(a) - \Gamma_{k-1}(a) = (-1)^k \sin(\pi a)\Big(\dfrac{1}{a+k} + \dfrac{1}{a-k}\Big) \cdot$

b) Calculer $\Gamma_0(a)$.

c) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $a \in E$, l'égalité : $\dfrac{\Gamma_n(a)}{\sin(\pi a)} = I_n(a) + J_n(a) - \dfrac{\pi}{\sin(\pi a)} \cdot$

4. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $u_n = (-1)^n \dfrac{2\,a}{a^2 - n^2} \cdot$

a) Montrer que pour tout $a \in E$, la série de terme général u_n est convergente.

b) Établir la relation : $\forall a \in E, \ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\,a}{a^2-n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a} \cdot$

Partie 2

5. Pour tout $a \in]\,0,1[$, on pose pour tout $t \in]\,0,1]$:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \alpha_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, t^{k+a-1} \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbf{N}^*, \ \beta_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} t^{k-a-1}.$$

a) Vérifier que $\alpha_n(t) - \dfrac{t^{a-1}}{1+t} = \dfrac{(-1)^n\, t^{a+n}}{1+t}$ et que $\beta_n(t) - \dfrac{t^{-a}}{1+t} = \dfrac{(-1)^{n+1}\, t^{n-a}}{1+t} \cdot$

b) Établir la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \alpha_n(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \beta_n(t)\, dt$ et exprimer leurs valeurs respectives en fonction de $I_n(a)$ et $J_n(a)$.

6.a) Montrer que pour tout $a \in]\,0,1[$, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-a}}{1+t}\, dt$ sont convergentes.

On pose alors : $\forall a \in]\,0,1[, \ A(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt$ et $B(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-a}}{1+t}\, dt$.

b) Établir l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a)$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a) = A(a)$. De même, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n(a)$.

c) Montrer que pour tout $a \in]\,0,1[$, on a : $A(a) + B(a) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi a)} \cdot$

d) Montrer que pour tout $a \in]\,0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{\sin(\pi a)} \cdot$

e) Montrer que pour tout réel $\theta > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\theta}\, dt$ est convergente et déterminer sa valeur en fonction de θ (on pourra utiliser le changement de variable $u = t^\theta$).

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : HEC Paris – Audencia Business School

SCIENCES SOCIALES

Programme ENS B/L

Jeudi 27 avril 2017, de 14 h. à 18 h.

Les nouvelles frontières de l'État.

N.B. :
Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de tout matériel électronique n'est pas autorisée.

IMPRIMERIE NATIONALE – 17 1336 – D'après documents fournis