BCE ESSEC 2017 épreuve à option BL.

Durée 4 heures.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

I Exercice.

Dans cet exercice, on désigne par E l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ à valeurs réelles vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On se propose de déterminer, si elles existent les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble :

$$I = \left\{ \int_0^1 |f - f'| \ ; \ f \in E \right\}.$$

On rappelle qu'un ensemble I non vide de réels admet une borne supérieure (resp. inférieure), si l'ensemble I est majoré (resp. minoré). Dans ce cas, si M (resp. m) est un majorant (resp. minorant) de I et s'il existe une suite d'éléments de I convergeant vers M (resp. m), alors M (resp. m) est la borne supérieure (resp. inférieure) de I.

Pour f dans E et x dans $[0,1]$, on pose $g(x) = f(x)\exp(-x)$ et on dira que g est associée à f.

1. Pour $x \in [0,1]$, exprimer $f'(x) - f(x)$ à l'aide de $g'(x)$.

2. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, déterminer une fonction g_n polynomiale de degré 2 telle que :

$$g_n(0) = 0 \quad g_n(1) = \frac{1}{\exp(1)} \quad g_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{\exp(1)}.$$

3. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[0,1]$, on pose $f_n(x) = g_n(x)\exp(x)$.

   Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n - f_n'|$ et en déduire que l'ensemble I n'est pas majoré.

4. En utilisant la fonction g associée à une fonction f quelconque de E, montrer que $\displaystyle\int_0^1 |f-f'|$ est minoré par $\dfrac{1}{\exp(1)}$.

Le but de la suite de cet exercice est de montrer que la borne inférieure de I est $\dfrac{1}{\exp(1)}$.

Pour t dans $]0,1[$, on définit la fonction f_t sur $[0,1]$ par :

$$f_t(x) = \begin{cases} \dfrac{(2t-x)x\exp(x-1)}{t^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant t \\ \exp(x-1) & \text{si } t < x \leqslant 1 \end{cases}$$

5. Montrer que f_t est dans E.

6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 |f_t - f_t'|$ et en déduire $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_0^1 |f_t - f_t'|$.

7. Montrer que la borne inférieure de I est $\dfrac{1}{\exp(1)}$.

II Problème.

La première partie de ce problème détermine quelques propriétés des matrices d'Ehrenfest.

La seconde partie étudie un modèle de diffusion de particules à travers une membrane poreuse.

Dans ce problème, n est un entier supérieur ou égale à 2.

On désigne par A_n la matrice carrée de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & n-1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & n & 0 \end{pmatrix}$$

Plus formellement, pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et $1 \leqslant j \leqslant n+1$, le terme situé sur la ligne i et la colonne j de A_n est $\begin{cases} n-i+1 & \text{si } j = i+1 \\ i-1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Enfin on pose $A'_n = \dfrac{1}{n}A_n$ et $B_n = A_n^T$ où A_n^T désigne la matrice transposée de A_n.

Par commodité, on confondra matrice colonne à k lignes et vecteurs de $\mathbb{R}^k$.

Partie 1 : matrice d'Ehrenfest.

8. Déterminer les éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres) de la matrice B_2.
   Cette matrice est-elle diagonalisable ?

9. Déterminer B_2^p pour p entier naturel.

10. En utilisant B_2, justifier que A_2 est diagonalisable et donner ses éléments propres.

On va généraliser les résultats obtenus pour $n = 2$ en ce qui concerne les éléments propres de B_n.

Pour x réel on pose $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$.

on admet les résultats suivants, concernant les fonctions ch et sh :

- pour tout réel x, $\exp(x) = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$,
- pour tout réel x, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$,
- les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

Pour p entier naturel avec $0 \leqslant p \leqslant n$ et x réel, on pose $f_p(x) = \mathrm{sh}^p(x)\mathrm{ch}^{n-p}(x)$ et on désigne par F_n le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans lui-même, engendré par la famille $\mathscr{B} = (f_0,f_1,\ldots,f_n)$.

Pour p entier relatif, on définit la fonction e_p sur $\mathbb{R}$ par $e_p(x) = \exp(px)$.

11. Montrer que la famille $\mathscr{B}$ est une base de F_n.

12. Soit k un entier vérifiant $0 \leqslant 2k \leqslant n$.

    (a) En remarquant que pour x réel,
    $$\exp((n-2k)x) = \left(\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)\right)^k \left(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\right)^{n-2k},$$
    montrer que e_{n-2k} est dans F_n.

    (b) Déterminer les coordonnées de e_n et de e_{n-2} dans la base $\mathscr{B}$.

    (c) Montrer que e_{2k-n} est dans F_n.

13. Pour j entier naturel avec $0 \leqslant j \leqslant n$, exprimer la dérivée f_j' en fonction de vecteurs de la famille $(f_0, f_1, \dots f_n)$.

14. Montrer que l'application $u_n : f \mapsto f'$ réalise un endomorphisme de F_n et donner la matrice de u_n dans la base $\mathscr{B}$.

15. Soit λ un réel. Quelles sont les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = \lambda f$? (on pourra calculer la dérivée de $x \mapsto \exp(-\lambda x) f(x)$)

16. Montrer que les valeurs propres de u_n sont les entiers de l'ensemble

$$\{\pm n, \pm (n-2), \dots, \pm (n-2p)\}$$

où $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (partie entière de $\frac{n}{2}$) et qu'un vecteur associé à la valeur propre $\varepsilon(n-2k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$ et $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ est l'application $e_{\varepsilon(n-2k)}$.

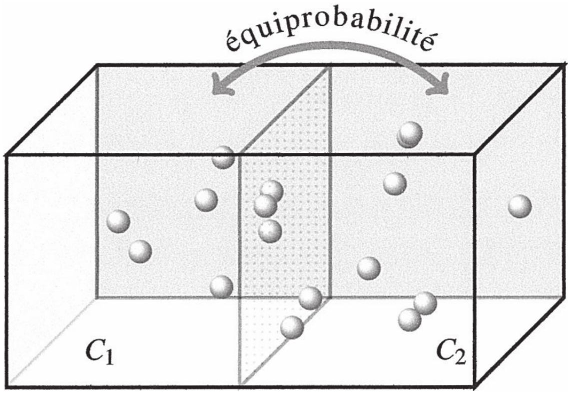
17. La matrice B_n est-elle diagonalisable ?

18. Montrer que $\dfrac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-1} & 1 \end{pmatrix}$ est l'unique matrice ligne $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_{n+1} \end{pmatrix}$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \ell_i = 1 \quad \text{et} \quad LA_n' = L$$

Partie B : diffusion des particules.

Une boîte contient n particules ; cette boîte est séparée en deux boîtes notées C_1 et C_2 par une membrane poreuse. On modélise le passage des particules d'une boîte à l'autre de la façon suivante. À chaque instant entier, on choisit une des n particules avec équiprobabilité et on la transfère dans l'autre boîte. Les tirages sont supposés indépendants.



On admet qu'il existe un espace probabilisé $\mathscr{E} = (\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ tel que pour tout p de $\mathbb{N}$, le nombre de particules dans la boîte C_1 à l'instant p définit une variable aléatoire X_p sur $\mathscr{E}$.

Si A est un événement élément de $\mathscr{A}$, si $0 \leqslant k \leqslant n$ et si $\mathbb{P}(X_p = k) = 0$, on pose par convention $\mathbb{P}(A/X_p = k) = 0$. Avec cette convention, on a la formule que l'on pourra admettre :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A/X_p = k)\mathbb{P}(X_p = k).$$

L'espérance d'une variable aléatoire discrète finie sera notée $\mathbb{E}(X)$.

On note enfin, pour p dans $\mathbb{N}$, L_p la matrice ligne :

$$L_p = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_p = 0) & \mathbb{P}(X_p = 1) & \dots & \mathbb{P}(X_p = n) \end{pmatrix}.$$

19. Déterminer L_{p+1} en fonction de L_p en utilisant la matrice A'_n et en déduire L_p en fonction de A'_n, p et L_0.

20. On suppose dans cette question que X_0 suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
Quelle la loi suivie par X_p ? Quelle est son espérance et sa variance ?

On revient au cas général.

21. Montrer que pour tout p entier naturel :
$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \left(\frac{n-2}{n}\right)\mathbb{E}(X_p) + 1$$
et en déduire l'espérance de X_p en fonction de n, p et $\mathbb{E}(X_0)$ (on pourra étudier $\mathbb{E}(X_p) - \frac{n}{2}$).

22. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X_p)$ lorsque p tend vers $+\infty$? Ce résultat vous semble-t-il conforme à l'intuition ?

23. Une modélisation physique stipule que la pression P_p dans la boîte C_1 à l'instant p est l'ordre de $P_p = \mathbb{E}\left(\frac{X_p}{n}\right)$.
On note t la fréquence de transitions par seconde et on suppose que $p = nt$ (temps mis pour effectuer n transitions).
Exprimer la limite de P_{nt} lorsque n temps $+\infty$ en fonction de t et de P_0 seulement. Ceci établit une loi de refroidissement due à Isaac Newton.