BCE ESSEC 2017 épreuve à option BL.

Durée 4 heures.

I Exercice.

1. Exprimons $f' - f$ en fonction de $g'(x)$.

   Nous ne connaissons pas pour l'instant g' nous allons donc calculer la dérivée de g.

   g est un produit uv de fonctions avec $u(x) = f(x)$ et $v(x) = \exp(-x)$ qui sont toutes deux de classe C^1 donc dérivables et

   $$u'(x) = f'(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = -\exp(-x).$$

   Par conséquent $g = uv$ est dérivable et quelque soit $x \in [0,1]$

   $$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= f'(x)\exp(-x) + f(x)\left(-\exp(-x)\right) \\ &= f'(x)\exp(-x) - f(x)\exp(-x) \\ &= \left[f'(x) - f(x)\right]\exp(-x) \end{aligned}$$

   De

   $$g'(x) = \left[f'(x) - f(x)\right]\mathrm{e}^{-x}$$

   Nous déduisons, puisque $\exp(-x) \neq 0$

   $$\frac{g'(x)}{\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\left[f'(x) - f(x)\right]\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}}$$

   Donc :

   $$g'(x)\mathrm{e}^{x} = f'(x) - f(x)$$

   Finalement

   $$\boxed{\text{quelque soit } x \in [0,1],\ f'(x) - f(x) = g'(x)\mathrm{e}^{x}.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   Déterminons g_n par analyse-synthèse.

   * Supposons que g_n est polynomiale de degré 2 vérifiant les trois conditions de l'énoncé.
     Autrement dit il existe a, b et c des réels avec $a \neq 0$ tels que : $g_n(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
     $g_n(0) = 0$ donc $c = 0$ et $g_n(x) = ax^2 + bx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
     De : $g_n(1) = \mathrm{e}^{-1}$ nous déduisons $a + b = \mathrm{e}^{-1}$ puis
     $$a = -b + \mathrm{e}^{-1} \quad (E_1).$$
     De : $g_n\left(\frac{1}{2}\right) = n\mathrm{e}^{-1}$ nous déduisons $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = n\mathrm{e}^{-1}$ et donc
     $$a = -2b + 4n\mathrm{e}^{-1} \quad (E_2).$$
     De (E_1) et (E_2) nous déduisons :
     $$-b + \mathrm{e}^{-1} = -2b + 4n\mathrm{e}^{-1}.$$
     Donc : $b = (4n-1)\mathrm{e}^{-1}$.
     Puis d'après (E_1) : $a = (2-4n)\mathrm{e}^{-1}$.
   * Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g_n(x) = (2-4n)\mathrm{e}^{-1}x^2 + (4n-1)\mathrm{e}^{-1}x$.
     Il est alors aisé de vérifier que g_n est polynomiale de degré deux et que les conditions sur $g_n(0)$, $g_n(1)$ et $g_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

   Nous avons donc démontré par analyse-synthèse que

   quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction
   $g_n(x) = (2-4n)\mathrm{e}^{-1}x^2 + (4n-1)\mathrm{e}^{-1}x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, convient.

3. Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 |f_n - f_n'|$.

   La formulation de l'énoncé semble affirmer l'existence de cette limite ce qui nous autoriserait à faire l'économie de la démonstration de cette existence.

   Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$.
   D'après la question 1 :
   $$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n'(x)| &= |g_n'(x)|\mathrm{e}^x \\ &\geqslant |g_n'(x)|\mathrm{e}^0 \\ &\geqslant |g_n'(x)| \end{aligned}$$

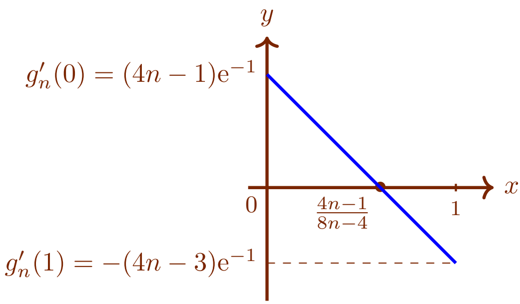
Donc :

$$\int_0^1 |f_n - f_n'| \geqslant \int_0^1 |g_n'| \quad (E_3)$$

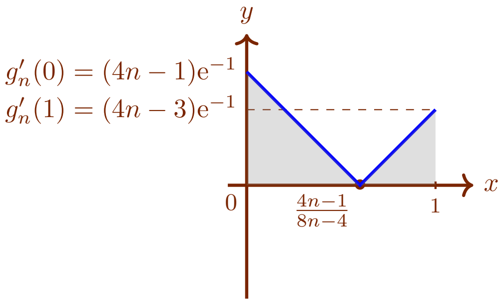
Et

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= 2(2-4n)\mathrm{e}^{-1}x + (4n-1)\mathrm{e}^{-1} \\ &= -(8n-4)\mathrm{e}^{-1}x + (4n-1)\mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

g_n' est une fonction affine dont le coefficient directeur est strictement négatif et qui s'annule en $-\frac{(4n-1)\mathrm{e}^{-1}}{-(8n-4)\mathrm{e}^{-1}} = \frac{4n-1}{8n-4}$. Nous en déduisons sa représentation graphique (schématique).



Puis celle de $|g_n'|$:



$\int_0^1 |g_n'|$ peut alors s'interpréter comme l'aire grisée qui est formée de deux triangles rectangles.

$$\begin{aligned}\int_0^1 |g_n'| &= \frac{1}{2}(4n-1)\mathrm{e}^{-1}\frac{4n-1}{8n-4} + \frac{1}{2}(4n-3)\mathrm{e}^{-1}\left(1-\frac{4n-1}{8n-4}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(8n-4)}\left[(4n-1)^2+(4n-3)\left(8n-4-4n+1\right)\right]\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(8n-4)}\left[(4n-1)^2+(4n-3)^2\right]\end{aligned}$$

Donc en utilisant (E_3) :

$$\int_0^1 |f_n - f_n'| \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(8n-4)}\left[(4n-1)^2+(4n-3)^2\right].$$

De $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(8n-4)}\left[(4n-1)^2+(4n-3)^2\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-1}n^3$, nous déduisons finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 |f_n - f_n'| = +\infty.}$$

Nous avons donc trouvé une suite d'élément de I qui n'est pas majorée donc

$$\boxed{I \text{ n'est pas majoré.}}$$

4. Démontrons : $\forall f\in E$, $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \int_0^1 |f-f'|$.

   Soit $f\in E$.
   D'après la question 1, quelque soit $x\in[0;1]$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(t)-f(t)|\ \mathrm{d}t &= \int_0^1 |g'(t)|\ \mathrm{d}t\\ &\geqslant \left|\int_0^1 g'(t)\ \mathrm{d}t\right|\\ &\geqslant \left|[g(t)]_0^1\right|\end{aligned}$$

   de $f(0)=0$ et $f(1)=1$ nous déduisons $g(0)=0$ et $g(1)=\mathrm{e}^{-1}$, donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(t)-f(t)|\ \mathrm{d}t &\geqslant \left|\mathrm{e}^{-1}-0\right|\\ &\geqslant \frac{1}{\exp(1)}\end{aligned}$$

Nous avons donc établi que quelque soit $f \in E$, $\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\, dt \geqslant \frac{1}{\exp(1)}$.
Autrement dit

$$\boxed{\frac{1}{\exp(1)} \text{ est un minorant de } I.}$$

5. Soit $t \in]0;1[$.

   Démontrons : f_t est de classe C^1 sur $[0;1]$.

   Le résultat est évident sur $[0;1] \setminus \{t\}$.

   * f est continue sur $[0;1]$.
   * f est dérivable sur $[0;1] \setminus \{t\}$.
     Si $x \in [0;t[$ alors $f_t(x) = \frac{1}{t^2}(2tx - x^2)\exp(x-1)$ et donc

   $$\begin{aligned} f_t'(x) &= \frac{1}{t^2}\left[(2t-2x)\exp(x-1) + (2tx - x^2)\exp(x-1)\right] \\ &= \frac{\exp(x-1)}{t^2}(-x^2 + (2t-2)x + 2t) \end{aligned}$$

     et si $x \in]t;1]$ alors $f_t'(x) = \exp(x-1)$.
   * $f_t'(x) \underset{x \to t}{\to} \exp(t-1)$.
     En effet

   $$\frac{\exp(x-1)}{t^2}(-x^2 + (2t-2)x + 2t) \underset{x \to t^-}{\to} \exp(t-1),$$

     et

   $$\exp(x-1) \underset{x \to t^+}{\to} \exp(t-1).$$

   Des trois points précédents nous déduisons d'après le « théorème limite de la dérivée » que f est dérivable en t et $f'(t) = \exp(t-1)$.

   Finalement

   $$\boxed{f_t \in E.}$$

6. Calculons $\int_0^1 |f_t - f_t'|$.

   Soit $t \in]0;1[$.

Utlisons la relation de Chasles :

$$\int_0^1 |f_t - f_t'| = \int_0^t |f_t - f_t'| + \int_t^1 |f_t - f_t'|$$

Puisque sur $[t;1]$, $f_t = f_t'$:

$$\int_0^1 |f_t - f_t'| = \int_0^t |f_t - f_t'|$$

En utilisant l'expression de f_t' trouvée à la question précédente ainsi que celle de f_t :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_t - f_t'| &= \int_0^t \left|\frac{\exp(x-1)}{t^2}(2tx - x^2) - \frac{\exp(x-1)}{t^2}\left(-x^2 + (2t-2)x + 2t\right)\right| \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t \frac{\exp(x-1)}{t^2}\,|2x - 2t|\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{t^2}\int_0^t (t-x)\exp(x-1)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

En intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_t - f_t'| &= \frac{2}{t^2}\left(\left[(t-x)\exp(x-1)\right]_0^t - \int_0^t -\exp(x-1)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{t^2}\left(-t\mathrm{e}^{-1} + \left[\exp(x-1)\right]_0^t\right) \\ &= \frac{2}{t^2}\left(-t\mathrm{e}^{-1} + \exp(t-1) - \mathrm{e}^{-1}\right)\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{\int_0^1 |f_t - f_t'| = \frac{2\mathrm{e}^{-1}}{t^2}\left(-t + \exp(t) - 1\right).}$$

Déterminons $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_0^1 |f_t - f_t'|$.

$$\int_0^1 |f_t - f_t'| = \frac{2\mathrm{e}^{-1}}{t^2}\left(-t + \exp(t) - 1\right)$$

En considérant un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_t - f_t'| &= \frac{2\mathrm{e}^{-1}}{t^2}\left[-t + \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \mathrm{o}(t^3)\right) - 1)\right] \\ &= \mathrm{e}^{-1}\left(1 + \frac{1}{3}t + \mathrm{o}(t)\right)\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_0^1 |f_t - f_t'| = \mathrm{e}^{-1}.}$$

7. Déterminons la borne inférieure de I.

D'après la question précédente, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $t \in]0;1[$ tel que $f_t \in E$ et

$$\left|\mathrm{e}^{-1} - \int_0^1 |f_t - f_t'|\right| < \varepsilon$$

Nous en déduisons, e^{-1} étant, d'après la question 4, un minorant de I :

$$\mathrm{e}^{-1} \leqslant \int_0^1 |f_t - f_t'| < \mathrm{e}^{-1} + \varepsilon$$

Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$, nous pouvons conclure :

$$\boxed{\frac{1}{\exp(1)} \text{ est la borne inférieure de } I.}$$

II Problème.

Partie 1 : matrice d'Ehrenfest.

8.

$$\begin{aligned}B_2 &= A_2^T \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

* Première méthode : détermination du noyau.

Dire que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre pour B_2 et que $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si $\ker(\lambda I_3 - B_2) \neq \{0\}$.

Déterminons donc le noyau de $\lambda I_3 - B_2$.

Pour cela nous allons échelonner en colonnes la matrice du haut en préférant des coefficients sans λ sur la diagonale afin d'être sur du rang de la matrice.

$$\left[\begin{array}{c} \lambda I_3 - B_2 \\ \hline I_3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \lambda & -1 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ et en intervertissant les colonnes } \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & \lambda \\ \lambda & -2 & -2 \\ -1 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

En faisant : $C_3 \leftarrow \lambda C_1 + C_3$ $\left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -2 & \lambda^2 - 2 \\ -1 & \lambda & -\lambda \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

En faisant : $C_3 \leftarrow \lambda - \frac{\lambda^2-2}{-2} C_2 + C_3$ $\left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & \lambda\frac{\lambda^2-2}{2} - \lambda \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \frac{\lambda^2-2}{2} \end{array}\right]$.

Ainsi $\ker(\lambda I_3 - B_2) \neq 0$ si et seulement si $\lambda\frac{\lambda^2-2}{2} - \lambda = 0$.

Or

$$\begin{aligned} \lambda\frac{\lambda^2-2}{2} - \lambda &= \frac{\lambda^3 - 2\lambda}{2} - \frac{2\lambda}{2} \\ &= \frac{\lambda^3 - 4\lambda}{2} \\ &= \frac{1}{2}\lambda(\lambda^2 - 4) \\ &= \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

donc les valeurs propres de B_2 sont 0, -2 et 2 et des vecteurs propres correspondants sont $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \frac{\lambda^2-2}{2} \end{pmatrix}$.

* Seconde méthode : en utilisant le polynôme caractéristique (hors programme en B/L).

$$\begin{aligned}
\chi_{B_2}(X) &= \det\left(XI_3 - B_2\right) \\
&= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

D'après la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned}
\chi_{B_2}(X) &= X^3 - 2X - 2X \\
&= X^3 - 4X \\
&= X(X^2 - 4) \\
&= X(X^2 - 2^2) \\
&= X(X-2)(X+2)
\end{aligned}$$

χ_{B_2} est scindé simple sur $\mathbb{R}$ donc B_2 est diagonalisable, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B_2) = \{0; -2; 2\}$ et les sous-espaces propres correspondants sont de dimension 1.
Déterminons un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

. Dire que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0 équivaut successivement à :

$$B_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ 2x + 2z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

. Dire que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2 équivaut successivement à :

$$B_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x \\ 2x + 2z & = & 2y \\ y & = & 2z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x \\ y & = & y \\ y & = & 2z \end{array} \right.$$

Donc
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

. Dire que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -2 équivaut successivement à :

$$B_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -2x \\ 2x + 2z & = & -2y \\ y & = & -2z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -2x \\ y & = & y \\ y & = & -2z \end{array} \right.$$

Donc
$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -2.

Quelle que soit la méthode retenue :

> Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B_2) = \{-2; 0; 2\}$ et $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$,
> $E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
> Et par conséquent B_2 est diagonalisable.

9. Soit $p \in \mathbb{N}$.

* Notons $\mathscr{B}_v = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ la base formée de vecteurs propres pour B_2.
La matrice représentative de $X \mapsto B_2 X$ dans $\mathscr{B}_v$ est donc $D_2 = \mathrm{diag}(-2,0,2)$.
La matrice de passage de $\mathscr{B}_v$ vers la base canonique $\mathscr{B}_0$ est clairement : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Et donc : $B_2 = P^{-1} D_2 P$.
Puis

$$\begin{aligned} B_2^p &= \left(P^{-1} D_2 P\right)^p \\ &= P^{-1} D_2^p P \\ &= P^{-1} \mathrm{diag}((-2)^p, 0, 2^p) P \end{aligned}$$

* Déterminons P^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan.

	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ $L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Ainsi $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Finalement

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ B_2^p = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

10. Démontrons que A_2 est diagonalisable.

P étant inversible P^T l'est aussi et : $\left(P^{-1}\right)^T = \left(P^T\right)^{-1}$.

$$\begin{aligned} A_2 &= B_2^T \\ &= \left(P^{-1}D_2P\right)^T \\ &= P^T D_2^T \left(P^{-1}\right)^T \\ &= P^T D_2 \left(P^T\right)^{-1} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{A_2 \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_2) = \mathrm{SP}_{\mathbb{R}}(B_2) = \{-2; 0; 2\}.}$$

11. Par construction, $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de F_n.

 Démontrons que $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

 Notons $\mathscr{P}(n)$: « $(f_0, \dots, f_n)$ est libre ».
 Nous allons démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

 * Si $n = 1$ alors $f_0 = \mathrm{ch}$ et $f_1 = \mathrm{sh}$. Démontrons que (sh,ch) est une famille libre.
 Soient λ et μ des réels tels que : $\lambda \mathrm{ch} + \mu \mathrm{sh} = 0$.
 Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}(\lambda+\mu)\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}(\lambda-\mu)\mathrm{e}^{-x} = 0$.
 Nous en déduisons en passant à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ que nécessairement $\lambda+\mu = 0$. Puis en faisant tendre x vers $-\infty$ que $\lambda-\mu = 0$.
 Finalement $\lambda = \mu = 0$.
 Autrement dit (f_0, f_1) est libre et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
 * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. supposons $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
 Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tels que

 $$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0.$$

 Autrement dit :

 $$\lambda_0 \mathrm{ch}^{n+1} + \lambda_1 \mathrm{sh} \cdot \mathrm{ch}^n + \cdots + \mathrm{sh}^{n+1} = 0.$$

 En particulier nous en déduisons pour $x = 0$ que $\lambda_0 = 0$. Ainsi :

 $$\lambda_1 \mathrm{sh} \cdot \mathrm{ch}^n + \cdots + \lambda_{n+1} \mathrm{sh}^{n+1} = 0.$$

En factorisant

$$\mathrm{sh} \cdot \left(\lambda_1 \mathrm{ch}^n + \lambda_2 \mathrm{sh} \cdot \mathrm{ch}^{n-1} + \cdots + \lambda_{n+1} \mathrm{sh}^n\right) = 0.$$

Puisque sh ne s'annule qu'en 0 nous en déduisons que quelque soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\lambda_1 \mathrm{ch}^n + \lambda_2 \mathrm{sh} \cdot \mathrm{ch}^{n-1} + \cdots + \lambda_{n+1} \mathrm{sh}^n = 0.$$

Or, d'après notre hypothèse de récurrence $(f_0, \ldots, f_n)$ est une famille libre, donc, nécessairement $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$.
Ainsi nous avons établi que $(f_0, \ldots, f_{n+1})$ est une famille libre. Autrement dit $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $(f_0, \ldots f_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Et puisque $\mathscr{B}$ est un famille libre et génératrice de F_n

$\mathscr{B}$ est une base de F_n.

12. (a) Justifions l'égalité proposée.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Puisque $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 0$,

$$\begin{aligned}
\exp\left((n-2k)x\right) &= \left(\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)\right)^k \exp\left((n-2k)x\right) \\
&= \left(\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)\right)^k \mathrm{e}^{(n-2k)x} \\
&= \left(\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)\right)^k (\mathrm{e}^x)^{n-2k}
\end{aligned}$$

Puisque $\exp = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$

$$\exp\left((n-2k)x\right) = \left(\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)\right)^k (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^{n-2k}$$

Ainsi

quelque soit $x \in \mathbb{R}$

$$\exp\left((n-2k)x\right) = \left(\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)\right)^k (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^{n-2k}.$$

Montrons que e_{n-2k} est dans F_n.

Il faut établir que e_{n-2k} est une combinaison linéaire d' éléments de $\mathscr{B}$.

$$e_{n-2k} = \left(\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)\right)^k (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^{n-2k}$$

En utilisant la formule du binôme de Newton :

$$e_{n-2k} = \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{ch}^{2i} (-1)^{k-i} \mathrm{sh}^{2(k-i)}\right) \left(\sum_{j=0}^{n-2k} \binom{n-2k}{j} \mathrm{ch}^j \mathrm{sh}^{n-2k-j}\right)$$

En développant :

$$\begin{aligned}
e_{n-2k} &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} \mathrm{ch}^{2i+j} \mathrm{sh}^{2(k-i)+n-2k-j} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} \mathrm{ch}^{2i+j} \mathrm{sh}^{n-2i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} f_{2i+j}
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que e_{n-2k} est dans l'espace vectoriel engendré par $\mathscr{B}$. Autrement dit

$$\boxed{e_{n-2k} \in F_n.}$$

(b) Déterminons les coordonnées de e_n dans $\mathscr{B}$.

D'après la question précédente

$$e_{n-2k} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} f_{2i+j}$$

Donc, pour $k = 0$,

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^0 \binom{0}{0} \binom{n - 2\times 0}{j} f_{2\times 0 + j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f_j \end{aligned}$$

Le vecteur coordonnées en ligne de e_n dans $\mathscr{B}$ est

$$\left(\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \cdots \quad \binom{n}{n} \right).$$

Déterminons les coordonnées de e_{n-2} dans $\mathscr{B}$.

D'après la question précédente

$$e_{n-2k} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} f_{2i+j}$$

Donc, pour $k = 1$,

$$\begin{aligned} e_{n-2} &= \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{n-2\times 1} (-1)^{1-i} \binom{1}{i} \binom{n - 2\times 1}{j} f_{2i+j} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{1-0} \binom{1}{0} \binom{n-2}{j} f_{2\times 0+j} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{1-1} \binom{1}{1} \binom{n-2}{j} f_{2\times 1+j} \right) \\ &= \left(-\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} f_j \right) + \left(\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} f_{2+j} \right) \end{aligned}$$

Nous observons un télescopage des termes :

$$\begin{aligned} e_{n-2} &= \left(-\sum_{j=0}^{1} \binom{n-2}{j} f_j \right) + \left(\sum_{j=n-3}^{n-2} \binom{n-2}{j} f_{2+j} \right) \\ &= -f_0 - (n-2) f_2 + (n-2) f_{n-1} + f_n \end{aligned}$$

Le vecteur coordonnées en ligne de e_{n-2} dans $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & -(n-2) & 0 & \dots & 0 & (n-2) & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Justifions que : $e_{2k-n} \in F_n$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
e_{2k-n}(x) &= \exp\left((2k-n)x\right)\\
&= \exp\left((n-2k)(-x)\right)\\
&= e_{n-2k}(-x)\\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-2k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\binom{n-2k}{j}f_{2i+j}(-x)\\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-2k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\binom{n-2k}{j}\mathrm{sh}^{2i+j}(-x)\mathrm{ch}^{n-(2i+j)}(-x)
\end{aligned}$$

Et puisque sh est impaire et que ch est paire :

$$\begin{aligned}
e_{2k-n}(x) &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-2k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\binom{n-2k}{j}(-1)^{2i+j}\mathrm{sh}^{2i+j}(x)\mathrm{ch}^{n-(2i+j)}(x)\\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-2k}(-1)^{k-i+2i+j}\binom{k}{i}\binom{n-2k}{j}f_{2i+j}(x)
\end{aligned}$$

e_{2k-n} peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'élément de $\mathscr{B}$ donc

$$e_{2k-n} \in F_n.$$

13. Soit $j \in [\![0,n]\!]$.

Exprimons f'_j.

* Supposons $0 < j < n$.

f_j est un produit de puissances de fonctions sh et ch qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f_j est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'énoncé nous donne les dérivées de sh et ch donc

$$\begin{aligned} f_j' &= (j\text{ch} \cdot \text{sh}^{j-1}) \cdot \text{ch}^{n-j} + \text{sh}^j \cdot ((n-j)\text{sh} \cdot \text{ch}^{n-j-1}) \\ &= j\text{sh}^{j-1}\text{ch}^{n-(j-1)} + (n-j)\text{sh}^{j+1}\text{ch}^{n-(j+1)} \end{aligned}$$

* Si $j = 0$ alors $f_0' = n\text{sh} \cdot \text{ch}^{n-1} = nf_1$.
* Si $j = n$ alors $f_n' = n\text{ch} \cdot \text{sh}^{n-1} = nf_{n-1}$.

Finalement

$$\boxed{f_0' = nf_1,\ f_n' = nf_{n-1} \text{ et } f_j' = jf_{j-1} + (n-j)f_{j+1} \text{ pour tout } j \in [\![1,n-1]\!].}$$

14. Montrons que u_n est un endomorphisme.

D'après la question précédente, u_n est effectivement une application de F_n dans lui même : tout élément de F_n est une combinaison linéaire de f_j et les dérivées des f_j sont encore des combinaisons linéaire de f_j donc des éléments de F_n.
u_n est bien sûr linéaire puisque la dérivation est linéaire.

$$\boxed{u_n \text{ est un endomorphisme de } F_n.}$$

Déterminons la matrice de u_n relativement à la base $\mathscr{B}$.

D'après la question précédente, $u_n(f_0) = nf_1$, $u_n(f_n) = nf_{n-1}$ et si $j \in [\![1,n-1]\!]$ alors $u_n(f_j) = jf_{j-1} + (n-j)f_{j+1}$.
Par conséquent

$$\boxed{\text{mat}_{\mathscr{B}}(u_n) = B_n.}$$

15. Déterminons les fonctions f dérivables telles que $f' = \lambda f$ en raisonnant par analyse-synthèse.

* Supposons qu'il existe une fonction f dérivable telle que $f' = \lambda f$.
Notons $h : x \mapsto \exp(-\lambda x)f(x)$.
h est dérivable (comme produit de fonctions dérivables) sur $\mathbb{R}$ et quelque soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\lambda \exp(-\lambda x) f(x) + \exp(-\lambda x) f'(x) \\ &= [-\lambda f(x) + f'(x)] \exp(-\lambda x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent il existe un nombre réel μ tel que $h(x) = \mu$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit

$$\exp(-\lambda x) f(x) = \mu$$

D'où :

$$f(x) = \mu \exp(\lambda x)$$

* Soit μ un nombre réel. Notons $f(x) = \mu \exp(\lambda x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lambda \mu \exp(\lambda x) \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

Nous avons démontré en raisonnant par analyse-synthèse que l'ensemble des fonctions f dérivables telles que $f' = \lambda f$ est

$$\{x \mapsto \mu \exp(\lambda x) | \mu \in \mathbb{R}\}.$$

16. Démontrons qu'il s'agit effectivement des valeurs propres et de vecteurs propres de u_n.

D'après la question 12, e_{n-2k} et e_{2k-n} sont dans F_n.
D'après la question 15, $e_{\varepsilon(n-2k)}$ est bien un vecteur propre de u_n associé à la valeur propre $\varepsilon(n-2k)$.
Il est aisé de vérifier, en distinguant les cas n pair et n impair, qu'il y a donc $n+1$ valeurs propres distinctes. Nous les avons donc toutes trouvées.

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u_n) = \{\pm n, \pm (n-2), \ldots, \pm (n-2p)\}$ et, pour $k \in [\![0,p]\!]$, $e_{\varepsilon(n-2k)}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\varepsilon(n-2k)$.

17. Puisque $B_n = \text{mat}_{\mathscr{B}}(u_n)$, d'après la question précédente B_n admet $n+1$ valeurs propres distinctes donc

$$\boxed{B_n \text{ est diagonalisable.}}$$

18. Démontrons l'existence et l'unicité en raisonnant par analyse-synthèse.

* Supposons qu'il existe L telle que $LA'_n = L$ et $\sum_{i=0}^{n} \ell_i = 1$.
  De $LA'_n = L$ nous déduisons successivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} LA_n &= L \\ LA_n &= nL \\ A_n^T L^T &= nL^T \\ B_n L^T &= nL^T \end{aligned}$$

  Donc L^T est un vecteur propre associé à la valeur propre n pour B_n ou bien le vecteur nul. Puisque $\sum_{i=0}^{n} \ell_i = 1$, L^T n'est pas nul.
  Puisque B_n admet $n+1$ valeurs propres distinctes, le sous-espace propre associé à chaque valeur propre est de dimension 1. En particulier celui associé à la valeur propre n est engendré par $\text{mat}_{\mathscr{B}}(e_n)$. Par conséquent il existe un unique $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $L^T = \mu \text{mat}_{\mathscr{B}}(e_n)$.
  Or, d'après la question 12 $\text{mat}_{\mathscr{B}}(e_n)^T = \left(\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \dots \quad \binom{n}{n}\right)$ donc nécessairement :

$$\mu \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 1.$$

  De $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ nous déduisons que $\mu = \frac{1}{2^n}$.
  Ainsi : $L = \frac{1}{2^n} \left(\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \dots \quad \binom{n}{n}\right)$.
* Réciproquement, notons $L = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \dots \quad \binom{n}{n}\right)$ nous vérifions immédiatement que $LA'_n = L$ et $\sum_{i=0}^{n} \ell_i = 1$.

$$\boxed{\text{Nous avons établi par analyse-synthèse que } L \text{ est bien l'unique vecteur ligne vérifiant les deux conditions imposées.}}$$

Partie B : diffusion des particules.

19. Déterminons l_{p+1} en fonction de L_p en utilisant A'_n.

À chaque instant p une particule est déplacée d'un côté vers l'autre.

* Si à l'instant p il n'y a aucune particule dans C_1 alors nécessairement $X_{p+1} = 1$ et donc $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 \mid X_p = 0) = 1$.
* Si à l'instant p toutes les particules sont dans C_1 alors nécessairement $X_{p+1} = n-1$ et donc $\mathbb{P}(X_{p+1} = n-1 \mid X_p = n) = 1$.
* Si à l'instant p il y a $k \in [\![1,n-1]\!]$ particules dans C_1, alors $X_{p+1} \in \{k-1,k+1\}$.
  De plus comme le choix de la particule déplacée est fait avec équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = k-1 \mid X_p = k) = \frac{k}{n}$$

(la particule quitte C_1) et

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = k+1 \mid X_p = k) = \frac{n-k}{n}\mathbb{P}(X_p = k)$$

(la particule arrive dans C_1)

Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$.
Un embranchement de l'arbre probabiliste représentant cette situation pourrait clarifier les choses.
D'après la formule des probabilités totales que nous fourni l'énoncé

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = i) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_{p+1} = i \mid X_p = k)\mathbb{P}(X_p = k)$$

X_{p+1} et X_p ne peuvent différer que de 1 exactement donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{p+1} = i) &= \sum_{k\in\{i-1,i+1\}} \mathbb{P}(X_{p+1} = i \mid X_p = k)\mathbb{P}(X_p = k)\\ &= \mathbb{P}(X_{p+1} = i \mid X_p = i-1)\mathbb{P}(X_p = i-1)+\\ &\quad \mathbb{P}(X_{p+1} = i \mid X_p = i+1)\mathbb{P}(X_p = i+1)\end{aligned}$$

Puisque le choix de la particule à déplacer se fait de manière équiprobable :

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = i) = \frac{n-(i-1)}{n}\mathbb{P}(X_p = i-1) + \frac{i+1}{n}\mathbb{P}(X_p = i+1)$$

En raisonnant de même nous établissons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{p+1} = 0) &= \mathbb{P}(X_{p+1} = 0 \mid X_p = 1)\mathbb{P}(X_p = 1) \\ &= \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_p = 1)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{p+1} = n) &= \mathbb{P}(X_{p+1} = n \mid X_p = n-1)\mathbb{P}(X_p = n-1) \\ &= \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_p = n-1)\end{aligned}$$

Il est alors aisé de vérifier (par le calcul) que

$$\boxed{L_p A'_n = L_{p+1}.}$$

Déterminons L_p en fonction de A'_n, p et L_0.

Nous remarquons que par une récurrence évidente ($L_p = L_{p-1}A'^1_n = L_{p-2}A'^2_n = L_{p-3}A'^3_n = \cdots = L_0 A'^p_n$) nos obtenons

$$\boxed{L_p = L_0 A'^p_n.}$$

20. Déterminons la loi suivie par X_p.

Puisque X_0 suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, quelque soit $i \in [\![0,n]\!]$

$$\mathbb{P}(X_0 = i) = \binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}.$$

Donc $L_0 = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-1} & 1\end{pmatrix}$.

D'après la question 18 : $L_0 = L_0 A'_n$, et par conséquent, quelque soit $p \in \mathbb{N}$, $L_p = L_0$.

Nous en déduisons :

$$\boxed{\forall i \in [\![0,n]\!],\ P(X_p = i) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i}.}$$

21. Démontrons l'égalité proposée.

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_{p+1} = k)k$$

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \mathbb{P}(X_{p+1} = n)n + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_{p+1} = k)k$$

D'après la question 19

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_p = n-1)n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-(k-1)}{n}\mathbb{P}(X_p = k-1) + \frac{k+1}{n}\mathbb{P}(X_p = k+1)\right)k$$

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \mathbb{P}(X_p = n-1) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-(k-1))k\mathbb{P}(X_p = k-1) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)k\mathbb{P}(X_p = k+1)$$

En faisant le changement de variable $i = k-1$ dans la première somme et $j = k+1$ dans la seconde

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \mathbb{P}(X_p = n-1) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-2}(n-i)(i+1)\mathbb{P}(X_p = i) + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} j(j-1)\mathbb{P}(X_p = j)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) = \mathbb{P}(X_p = n-1) + \mathbb{P}(X_p = 0) + \frac{2(n-1)}{n}\mathbb{P}(X_p = 1)\\
\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n-2}(n-i)(i+1)\mathbb{P}(X_p = i) +\\
\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n-2} j(j-1)\mathbb{P}(X_p = j) +\\
\frac{(n-1)(n-2)}{n}\mathbb{P}(X_p = n-1) + (n-1)\mathbb{P}(X_p = n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) = \mathbb{P}(X_p = n-1) + \mathbb{P}(X_p = 0) + \frac{2(n-1)}{n}\mathbb{P}(X_p = 1)\\
\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n-2}\left[(n-i)(i+1) + i(i-1)\right]\mathbb{P}(X_p = i) +\\
\frac{(n-1)(n-2)}{n}\mathbb{P}(X_p = n-1) + (n-1)\mathbb{P}(X_p = n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) = \mathbb{P}(X_p = n-1) + \mathbb{P}(X_p = 0) + \frac{2(n-1)}{n}\mathbb{P}(X_p = 1)\\
\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n-2}\left[(n-2)i + n\right]\mathbb{P}(X_p = i) +\\
\frac{(n-1)(n-2)}{n}\mathbb{P}(X_p = n-1) + (n-1)\mathbb{P}(X_p = n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) = \mathbb{P}(X_p = n-1) + \mathbb{P}(X_p = 0) + \frac{2(n-1)}{n}\mathbb{P}(X_p = 1)\\
\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n-2}(n-2)i\mathbb{P}(X_p = i) +\\
\sum_{i=2}^{n-2}\mathbb{P}(X_p = i) +\\
\frac{(n-1)(n-2)}{n}\mathbb{P}(X_p = n-1) + (n-1)\mathbb{P}(X_p = n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) &= \mathbb{P}(X_p = n-1) + \mathbb{P}(X_p = 0) + \frac{2(n-1)}{n}\mathbb{P}(X_p = 1) \\ & \frac{n-2}{n}\mathbb{E}(X_p) - \frac{n-2}{n}1\mathbb{P}(X_p = 1) - \frac{n-2}{n}(n-1)\mathbb{P}(X_p = n-1) \\ & -\frac{n-2}{n}n\mathbb{P}(X_p = n)+ \\ & 1 - \mathbb{P}(X_p = 0) - \mathbb{P}(X_p = 1) - \mathbb{P}(X_p = n-1) - \mathbb{P}(X_p = n)+ \\ & \frac{(n-1)(n-2)}{n}\mathbb{P}(X_p = n-1) + (n-1)\mathbb{P}(X_p = n)\end{aligned}$$

Nous remarquons certains simplifications :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) &= \mathbb{P}(X_p = n-1) + \mathbb{P}(X_p = 0) + \frac{2(n-1)}{n}\mathbb{P}(X_p = 1) \\ & \frac{n-2}{n}\mathbb{E}(X_p) - \frac{n-2}{n}\mathbb{P}(X_p = 1) - \frac{n-2}{n}(n-1)\mathbb{P}(X_p = n-1) \\ & -(n-2)\mathbb{P}(X_p = n)+ \\ & 1 - \mathbb{P}(X_p = 0) - \mathbb{P}(X_p = 1) - \mathbb{P}(X_p = n-1) - \mathbb{P}(X_p = n)+ \\ & \frac{(n-1)(n-2)}{n}\mathbb{P}(X_p = n-1) + (n-1)\mathbb{P}(X_p = n)\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{p+1}) = \tfrac{n-2}{n}\mathbb{E}(X_p) + 1.}$$

Déterminons $\mathbb{E}(X_p)$.

Soit $p > 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) - \frac{n}{2} &= \frac{n-2}{n}\mathbb{E}(X_p) + 1 - \frac{n}{2} \\ &= \frac{n-2}{n}\left(\mathbb{E}(X_p) - \frac{n}{2}\right) + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n}{2} + 1 - \frac{n}{2} \\ &= \frac{n-2}{n}\left(\mathbb{E}(X_p) - \frac{n}{2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi $\left(\mathbb{E}(X_p) - \frac{n}{2}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $\mathbb{E}(X_0) - \frac{n}{2}$ et de raison $\frac{n-2}{n}$. Par conséquent :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_p) - \frac{n}{2} = \left(\frac{n-2}{n}\right)^p \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{n}{2}\right).$$

Enfin

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_p) = \left(\tfrac{n-2}{n}\right)^p \left(\mathbb{E}(X_0) - \tfrac{n}{2}\right) + \tfrac{n}{2}.$$

22. Déterminons la limite de $\mathbb{E}(X_p)$.

$n \geqslant 2$ donc $0 \leqslant \frac{n-2}{n} < 1$ et

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nous en déduisons, d'après la question précédente,

$$\lim_{p\to+\infty} \mathbb{E}(X_p) = \frac{n}{2}.$$

On s'attend effectivement à ce que, si l'expérience dure indéfiniment, en moyenne, à chaque instant, il y ait autant de particules dans les deux boîtes.

23. Exprimons la limite de P_{nt} lorsque n temps vers $+\infty$.

D'après la question 21

$$\begin{aligned} P_p &= \mathbb{E}\left(\frac{X_p}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(X_p\right) \end{aligned}$$

D'après la question 21

$$\begin{aligned} P_p &= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{n-2}{n}\right)^p \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2}\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{n-2}{n}\right)^p n\left(P_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{n}{2}\right] \\ &= \left(\frac{n-2}{n}\right)^p \left(P_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où

$$P_{nt} = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{nt}\left(P_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

Déterminons la limite de cette dernière expression.

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^{nt} = \exp\left[tn\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]$$

Or en utiisant un développement de ln

$$\begin{aligned} n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) &= n\left[-\frac{2}{n} - \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= -2 - \frac{2}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^{nt} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-2t\right)$$

Nous en déduisons finalement

$$\boxed{P_{nt} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-2t)\left(P_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.}$$