

BCE ESSEC 2017 épreuve à option BL.

Durée 4 heures.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

I Exercice.

Dans cet exercice, on désigne par E l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ à valeurs réelles vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On se propose de déterminer, si elles existent les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble :

$$I = \left\{ \int_0^1 |f - f'| ; f \in E \right\}.$$

On rappelle qu'un ensemble I non vide de réels admet une borne supérieure (resp. inférieure), si l'ensemble I est majoré (resp. minoré). Dans ce cas, si M (resp. m) est un majorant (resp. minorant) de I et s'il existe une suite d'éléments de I convergeant vers M (resp. m), alors M (resp. m) est la borne supérieure (resp. inférieure) de I .

Pour f dans E et x dans $[0,1]$, on pose $g(x) = f(x) \exp(-x)$ et on dira que g est associée à f .

1. Pour $x \in [0,1]$, exprimer $f'(x) - f(x)$ à l'aide de $g'(x)$.

Exprimons $f' - f$ en fonction de $g'(x)$.

Nous ne connaissons pas pour l'instant g' nous allons donc calculer la dérivée de g .

g est un produit uv de fonctions avec $u(x) = f(x)$ et $v(x) = \exp(-x)$ qui sont toutes deux de classe C^1 donc dérivables et

$$u'(x) = f'(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = -\exp(-x).$$

Par conséquent $g = uv$ est dérivable et quelque soit $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= f'(x) \exp(-x) + f(x) (-\exp(-x)) \\ &= f'(x)\exp(-x) - f(x)\exp(-x) \\ &= [f'(x) - f(x)] \exp(-x) \end{aligned}$$

De

$$g'(x) = [f'(x) - f(x)] e^{-x}$$

Nous déduisons, puisque $\exp(-x) \neq 0$

$$\frac{g'(x)}{e^{-x}} = \frac{[f'(x) - f(x)] e^{-x}}{e^{-x}}$$

Donc :

$$g'(x)e^x = f'(x) - f(x)$$

Finalement

quelque soit $x \in [0,1]$, $f'(x) - f(x) = g'(x)e^x$.

2. Pour n dans \mathbb{N}^* , déterminer une fonction g_n polynomiale de degré 2 telle que :

$$g_n(0) = 0 \quad g_n(1) = \frac{1}{\exp(1)} \quad g_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{\exp(1)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminons g_n par analyse-synthèse.

- * Supposons que g_n est polynomiale de degré 2 vérifiant les trois conditions de l'énoncé.

Autrement dit il existe a , b et c des réels avec $a \neq 0$ tels que : $g_n(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$g_n(0) = 0$ donc $c = 0$ et $g_n(x) = ax^2 + bx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De : $g_n(1) = e^{-1}$ nous déduisons $a + b = e^{-1}$ puis

$$a = -b + e^{-1} \quad (E_1).$$

De : $g_n\left(\frac{1}{2}\right) = ne^{-1}$ nous déduisons $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = ne^{-1}$ et donc

$$a = -2b + 4ne^{-1} \quad (E_2).$$

De (E_1) et (E_2) nous déduisons :

$$-b + e^{-1} = -2b + 4ne^{-1}.$$

Donc : $b = (4n - 1)e^{-1}$.

Puis d'après (E_1) : $a = (2 - 4n)e^{-1}$.

* Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g_n(x) = (2 - 4n)e^{-1}x^2 + (4n - 1)e^{-1}x$.

Il est alors aisé de vérifier que g_n est polynomiale de degré deux et que les conditions sur $g_n(0)$, $g_n(1)$ et $g_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

Nous avons donc démontré par analyse-synthèse que

quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction
 $g_n(x) = (2 - 4n)e^{-1}x^2 + (4n - 1)e^{-1}x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, convient.

3. Pour n dans \mathbb{N}^* et x dans $[0,1]$, on pose $f_n(x) = g_n(x) \exp(x)$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |f_n - f'_n|$ et en déduire que l'ensemble I n'est pas majoré.

Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |f_n - f'_n|$.

La formulation de l'énoncé semble affirmer l'existence de cette limite ce qui nous autoriserait à faire l'économie de la démonstration de cette existence.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$.

D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f'_n(x)| &= |g'_n(x)|e^x \\ &\geq |g'_n(x)|e^0 \\ &\geq |g'_n(x)| \end{aligned}$$

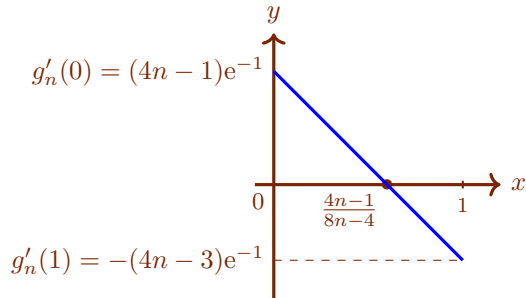
Donc :

$$\int_0^1 |f_n - f'_n| \geq \int_0^1 |g'_n| \quad (E_3)$$

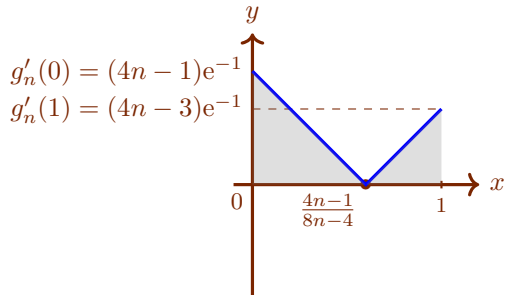
Et

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= 2(2 - 4n)e^{-1}x + (4n - 1)e^{-1} \\ &= -(8n - 4)e^{-1}x + (4n - 1)e^{-1} \end{aligned}$$

g'_n est une fonction affine dont le coefficient directeur est strictement négatif et qui s'annule en $-\frac{(4n-1)e^{-1}}{-(8n-4)e^{-1}} = \frac{4n-1}{8n-4}$. Nous en déduisons sa représentation graphique (schématique).



Puis celle de $|g'_n|$:



$\int_0^1 |g'_n|$ peut alors s'interpréter comme l'aire grisée qui est formée de deux triangles rectangles.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g'_n| &= \frac{1}{2}(4n-1)e^{-1}\frac{4n-1}{8n-4} + \frac{1}{2}(4n-3)e^{-1}\left(1 - \frac{4n-1}{8n-4}\right) \\
&= \frac{e^{-1}}{2(8n-4)} [(4n-1)^2 + (4n-3)(8n-4-4n+1)] \\
&= \frac{e^{-1}}{2(8n-4)} [(4n-1)^2 + (4n-3)^2]
\end{aligned}$$

Donc en utilisant (E_3) :

$$\int_0^1 |f_n - f'_n| \geq \frac{e^{-1}}{2(8n-4)} [(4n-1)^2 + (4n-3)^2].$$

De $\frac{e^{-1}}{2(8n-4)} [(4n-1)^2 + (4n-3)^2] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-1}n^3$, nous déduisons finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |f_n - f'_n| = +\infty.$$

Nous avons donc trouvé une suite d'éléments de I qui n'est pas majorée donc

I n'est pas majoré.

4. En utilisant la fonction g associée à une fonction f quelconque de E , montrer que $\int_0^1 |f - f'|$ est minoré par $\frac{1}{\exp(1)}$.

Démontrons : $\forall f \in E, e^{-1} \leq \int_0^1 |f - f'|$.

Soit $f \in E$.

D'après la question 1, quelque soit $x \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f'(t) - f(t)| dt &= \int_0^1 |g'(t)| dt \\
&\geq \left| \int_0^1 g'(t) dt \right| \\
&\geq |g(t)_0^1|
\end{aligned}$$

de $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ nous déduisons $g(0) = 0$ et $g(1) = e^{-1}$, donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f'(t) - f(t)| dt &\geq |e^{-1} - 0| \\ &\geq \frac{1}{\exp(1)} \end{aligned}$$

Nous avons donc établi que quelque soit $f \in E$, $\int_0^1 |f'(t) - f(t)| dt \geq \frac{1}{\exp(1)}$.

Autrement dit

$$\frac{1}{\exp(1)} \text{ est un minorant de } I.$$

Le but de la suite de cet exercice est de montrer que la borne inférieure de I est $\frac{1}{\exp(1)}$.

Pour t dans $]0,1[$, on définit la fonction f_t sur $[0,1]$ par :

$$f_t(x) = \begin{cases} \frac{(2t-x)x \exp(x-1)}{t^2} & \text{si } 0 \leq x \leq t \\ \exp(x-1) & \text{si } t < x \leq 1 \end{cases}$$

5. Montrer que f_t est dans E .

Soit $t \in]0,1[$.

Démontrons : f_t est de classe C^1 sur $[0,1]$.

Le résultat est évident sur $[0,1] \setminus \{t\}$.

* f est continue sur $[0,1]$.

* f est dérivable sur $[0,1] \setminus \{t\}$.

Si $x \in [0,t[$ alors $f_t(x) = \frac{1}{t^2}(2tx - x^2) \exp(x-1)$ et donc

$$\begin{aligned} f'_t(x) &= \frac{1}{t^2} [(2t-2x) \exp(x-1) + (2tx - x^2) \exp(x-1)] \\ &= \frac{\exp(x-1)}{t^2} (-x^2 + (2t-2)x + 2t) \end{aligned}$$

et si $x \in]t,1]$ alors $f'_t(x) = \exp(x-1)$.

$$* f'_t(x) \xrightarrow{x \rightarrow t} \exp(t-1).$$

En effet

$$\frac{\exp(x-1)}{t^2} (-x^2 + (2t-2)x + 2t) \xrightarrow{x \rightarrow t^-} \exp(t-1),$$

et

$$\exp(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow t^+} \exp(t-1).$$

Des trois points précédents nous déduisons d'après le « théorème limite de la dérivée » que f est dérivable en t et $f'(t) = \exp(t-1)$.

Finalement

$$f_t \in E.$$

6. Calculer $\int_0^1 |f_t - f'_t|$ et en déduire $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \int_0^1 |f_t - f'_t|$.

Calculons $\int_0^1 |f_t - f'_t|$.

Soit $t \in]0; 1[$.

Utilisons la relation de Chasles :

$$\int_0^1 |f_t - f'_t| = \int_0^t |f_t - f'_t| + \int_t^1 |f_t - f'_t|$$

Puisque sur $[t; 1]$, $f_t = f'_t$:

$$\int_0^1 |f_t - f'_t| = \int_0^t |f_t - f'_t|$$

En utilisant l'expression de f'_t trouvée à la question précédente ainsi que celle de f_t :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_t - f'_t| &= \int_0^t \left| \frac{\exp(x-1)}{t^2} (2tx - x^2) - \frac{\exp(x-1)}{t^2} (-x^2 + (2t-2)x + 2t) \right| dx \\ &= \int_0^t \frac{\exp(x-1)}{t^2} |2x - 2t| dx \\ &= \frac{2}{t^2} \int_0^t (t-x) \exp(x-1) dx \end{aligned}$$

En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_t - f'_t| &= \frac{2}{t^2} \left([(t-x)\exp(x-1)]_0^t - \int_0^t -\exp(x-1) \, dx \right) \\ &= \frac{2}{t^2} \left(-te^{-1} + [\exp(x-1)]_0^t \right) \\ &= \frac{2}{t^2} \left(-te^{-1} + \exp(t-1) - e^{-1} \right) \end{aligned}$$

Enfin

$$\int_0^1 |f_t - f'_t| = \frac{2e^{-1}}{t^2} (-t + \exp(t) - 1).$$

Déterminons $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \int_0^1 |f_t - f'_t|$.

$$\int_0^1 |f_t - f'_t| = \frac{2e^{-1}}{t^2} (-t + \exp(t) - 1)$$

En considérant un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_t - f'_t| &= \frac{2e^{-1}}{t^2} \left[-t + \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \right) - 1 \right] \\ &= e^{-1} \left(1 + \frac{1}{3}t + o(t) \right) \end{aligned}$$

Finalement

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \int_0^1 |f_t - f'_t| = e^{-1}.$$

7. Montrer que la borne inférieure de I est $\frac{1}{\exp(1)}$.

Déterminons la borne inférieure de I .

D'après la question précédente, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $t \in]0; 1[$ tel que $f_t \in E$ et

$$\left| e^{-1} - \int_0^1 |f_t - f'_t| \right| < \varepsilon$$

Nous en déduisons, e^{-1} étant, d'après la question 4, un minorant de I :

$$e^{-1} \leq \int_0^1 |f_t - f'_t| < e^{-1} + \varepsilon$$

Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$, nous pouvons conclure :

$$\frac{1}{\exp(1)} \text{ est la borne inférieure de } I.$$

II Problème.

La première partie de ce problème détermine quelques propriétés des matrices d'Ehrenfest.

La seconde partie étudie un modèle de diffusion de particules à travers une membrane poreuse.

Dans ce problème, n est un entier supérieur ou égale à 2.

On désigne par A_n la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & n-1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & n & 0 \end{pmatrix}$$

Plus formellement, pour $1 \leq i \leq n+1$ et $1 \leq j \leq n+1$, le terme situé sur la ligne i et la colonne j de A_n est $\begin{cases} n-i+1 & \text{si } j=i+1 \\ i-1 & \text{si } i=j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Enfin on pose $A'_n = \frac{1}{n}A_n$ et $B_n = A_n^T$ où A_n^T désigne la matrice transposée de A_n .

Par commodité, on confondra matrice colonne à k lignes et vecteurs de \mathbb{R}^k .

Partie 1 : matrice d'Ehrenfest.

8. Déterminer les éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres) de la matrice B_2 .

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

$$\begin{aligned}
 B_2 &= A_2^T \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

* Première méthode : détermination du noyau.

Dire que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre pour B_2 et que $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si $\ker(\lambda I_3 - B_2) \neq \{0\}$.

Déterminons donc le noyau de $\lambda I_3 - B_2$.

Pour cela nous allons échelonner en colonnes la matrice du haut en préférant des coefficients sans λ sur la diagonale afin d'être sûr du rang de la matrice.

$$\left[\frac{\lambda I_3 - B_2}{I_3} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}
 \lambda & -1 & 0 & & & \\
 -2 & \lambda & -2 & & & \\
 0 & -1 & \lambda & & & \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & & & \\
 0 & 1 & 0 & & & \\
 0 & 0 & 1 & & &
 \end{array} \right] \text{ et en intervertissant les colonnes } \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 -1 & 0 & \lambda & & & \\
 \lambda & -2 & -2 & & & \\
 -1 & \lambda & 0 & & & \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & & & \\
 1 & 0 & 0 & & & \\
 0 & 1 & 0 & & &
 \end{array} \right]$$

$$\text{En faisant : } C_3 \leftarrow \lambda C_1 + C_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 -1 & 0 & 0 & & & \\
 \lambda & -2 & \lambda^2 - 2 & & & \\
 -1 & \lambda & -\lambda & & & \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & & & \\
 1 & 0 & \lambda & & & \\
 0 & 1 & 0 & & &
 \end{array} \right]$$

$$\text{En faisant : } C_3 \leftarrow \lambda - \frac{\lambda^2 - 2}{-2} C_2 + C_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 -1 & 0 & 0 & & & \\
 \lambda & -2 & 0 & & & \\
 -1 & \lambda & \lambda \frac{\lambda^2 - 2}{2} - \lambda & & & \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & & & \\
 1 & 0 & \lambda & & & \\
 0 & 1 & \frac{\lambda^2 - 2}{2} & & &
 \end{array} \right].$$

Ainsi $\ker(\lambda I_3 - B_2) \neq 0$ si et seulement si $\lambda \frac{\lambda^2 - 2}{2} - \lambda = 0$.

Or

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\lambda^2 - 2}{2} - \lambda &= \frac{\lambda^3 - 2\lambda}{2} - \frac{2\lambda}{2} \\ &= \frac{\lambda^3 - 4\lambda}{2} \\ &= \frac{1}{2}\lambda(\lambda^2 - 4) \\ &= \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

donc les valeurs propres de B_2 sont 0, -2 et 2 et des vecteurs propres correspondants sont $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \frac{\lambda^2 - 2}{2} \end{pmatrix}$.

* Seconde méthode : en utilisant le polynôme caractéristique (hors programme en B/L).

$$\begin{aligned} \chi_{B_2}(X) &= \det(XI_3 - B_2) \\ &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \end{aligned}$$

D'après la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned} \chi_{B_2}(X) &= X^3 - 2X - 2X \\ &= X^3 - 4X \\ &= X(X^2 - 4) \\ &= X(X^2 - 2^2) \\ &= X(X - 2)(X + 2) \end{aligned}$$

χ_{B_2} est scindé simple sur \mathbb{R} donc B_2 est diagonalisable, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B_2) = \{0; -2; 2\}$ et les sous-espaces propres correspondants sont de dimension 1.

Déterminons un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

. Dire que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0 équivaut successivement à :

$$B_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

- . Dire que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2 équivaut successivement à :

$$B_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x + 2z = 2y \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = y \\ y = 2z \end{cases}$$

Donc

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

- . Dire que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -2 équivaut successivement à :

$$B_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ 2x + 2z = -2y \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = y \\ y = -2z \end{cases}$$

Donc

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -2 .

Quelle que soit la méthode retenue :

Ainsi $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B_2) = \{-2; 0; 2\}$ et $E_{-2} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,

$E_0 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Et par conséquent B_2 est diagonalisable.

9. Déterminer B_2^p pour p entier naturel.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

* Notons $\mathcal{B}_v = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ la base formée de vecteurs propres pour B_2 .

La matrice représentative de $X \mapsto B_2 X$ dans \mathcal{B}_v est donc $D_2 = \text{diag}(-2, 0, 2)$.

La matrice de passage de \mathcal{B}_v vers la base canonique \mathcal{B}_0 est clairement :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et donc : $B_2 = P^{-1}D_2P$.

Puis

$$\begin{aligned} B_2^p &= (P^{-1}D_2P)^p \\ &= P^{-1}D_2^pP \\ &= P^{-1}\text{diag}((-2)^p, 0, 2^p)P \end{aligned}$$

* Déterminons P^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan.

	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ $L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$\text{Ainsi } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \forall p \in \mathbb{N}, B_2^p = \begin{pmatrix} (-2)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. En utilisant B_2 , justifier que A_2 est diagonalisable et donner ses éléments propres.

Démontrons que A_2 est diagonalisable.

P étant inversible P^T l'est aussi et : $(P^{-1})^T = (P^T)^{-1}$.

$$\begin{aligned} A_2 &= B_2^T \\ &= (P^{-1}D_2P)^T \\ &= P^T D_2^T (P^{-1})^T \\ &= P^T D_2 (P^T)^{-1} \end{aligned}$$

Donc

$$A_2 \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A_2) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(B_2) = \{-2; 0; 2\}.$$

On va généraliser les résultats obtenus pour $n = 2$ en ce qui concerne les éléments propres de B_n .

Pour x réel on pose $\text{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$ et $\text{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$.

on admet les résultats suivants, concernant les fonctions ch et sh :

- pour tout réel x , $\exp(x) = \text{ch}(x) + \text{sh}(x)$,
- pour tout réel x , $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$,
- les fonctions ch et sh sont dérivables sur \mathbb{R} et $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$.

Pour p entier naturel avec $0 \leq p \leq n$ et x réel, on pose $f_p(x) = \text{sh}^p(x)\text{ch}^{n-p}(x)$ et on désigne par F_n le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de \mathbb{R} dans lui-même, engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$.

Pour p entier relatif, on définit la fonction e_p sur \mathbb{R} par $e_p(x) = \exp(px)$.

11. Montrer que la famille \mathcal{B} est une base de F_n .

Par construction, \mathcal{B} est une famille génératrice de F_n .

Démontrons que \mathcal{B} est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Notons $\mathcal{P}(n)$: « (f_0, \dots, f_n) est libre ».

Nous allons démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

* Si $n = 1$ alors $f_0 = \text{ch}$ et $f_1 = \text{sh}$. Démontrons que (sh, ch) est une famille libre.

Soient λ et μ des réels tels que : $\lambda \text{ch} + \mu \text{sh} = 0$.

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}(\lambda + \mu)e^x + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)e^{-x} = 0$.

Nous en déduisons en passant à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ que nécessairement $\lambda + \mu = 0$. Puis en faisant tendre x vers $-\infty$ que $\lambda - \mu = 0$.

Finalemment $\lambda = \mu = 0$.

Autrement dit (f_0, f_1) est libre et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. supposons $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tels que

$$\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0.$$

Autrement dit :

$$\lambda_0 \text{ch}^{n+1} + \lambda_1 \text{sh} \cdot \text{ch}^n + \dots + \text{sh}^{n+1} = 0.$$

En particulier nous en déduisons pour $x = 0$ que $\lambda_0 = 0$. Ainsi :

$$\lambda_1 \text{sh} \cdot \text{ch}^n + \dots + \lambda_{n+1} \text{sh}^{n+1} = 0.$$

En factorisant

$$\text{sh} \cdot (\lambda_1 \text{ch}^n + \lambda_2 \text{sh} \cdot \text{ch}^{n-1} + \dots + \lambda_{n+1} \text{sh}^n) = 0.$$

Puisque sh ne s'annule qu'en 0 nous en déduisons que quelque soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\lambda_1 \text{ch}^n + \lambda_2 \text{sh} \cdot \text{ch}^{n-1} + \dots + \lambda_{n+1} \text{sh}^n = 0.$$

Or, d'après notre hypothèse de récurrence (f_0, \dots, f_n) est une famille libre, donc, nécessairement $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$.

Ainsi nous avons établi que (f_0, \dots, f_{n+1}) est une famille libre. Autrement dit $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que (f_0, \dots, f_n) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Et puisque \mathcal{B} est un famille libre et génératrice de F_n

\mathcal{B} est une base de F_n .

12. Soit k un entier vérifiant $0 \leq 2k \leq n$.

(a) En remarquant que pour x réel,

$$\exp((n-2k)x) = (\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x))^k (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^{n-2k},$$

montrer que e_{n-2k} est dans F_n .

Justifions l'égalité proposée.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Puisque $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 0$,

$$\begin{aligned} \exp((n-2k)x) &= (\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x))^k \exp((n-2k)x) \\ &= (\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x))^k e^{(n-2k)x} \\ &= (\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x))^k (e^x)^{n-2k} \end{aligned}$$

Puisque $\exp = \operatorname{ch} + \operatorname{sh}$

$$\exp((n-2k)x) = (\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x))^k (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^{n-2k}$$

Ainsi

quelque soit $x \in \mathbb{R}$

$$\exp((n-2k)x) = (\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x))^k (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^{n-2k}.$$

Montrons que e_{n-2k} est dans F_n .

Il faut établir que e_{n-2k} est une combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{B} .

$$e_{n-2k} = (\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x))^k (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^{n-2k}$$

En utilisant la formule du binôme de Newton :

$$e_{n-2k} = \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \operatorname{ch}^{2i} (-1)^{k-i} \operatorname{sh}^{2(k-i)} \right) \left(\sum_{j=0}^{n-2k} \binom{n-2k}{j} \operatorname{ch}^j \operatorname{sh}^{n-2k-j} \right)$$

En développant :

$$\begin{aligned}
 e_{n-2k} &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} \text{ch}^{2i+j} \text{sh}^{2(k-i)+n-2k-j} \\
 &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} \text{ch}^{2i+j} \text{sh}^{n-2i-j} \\
 &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} f_{2i+j}
 \end{aligned}$$

Nous avons démontré que e_{n-2k} est dans l'espace vectoriel engendré par \mathcal{B} . Autrement dit

$$e_{n-2k} \in F_n.$$

- (b) Déterminer les coordonnées de e_n et de e_{n-2} dans la base \mathcal{B} .

Déterminons les coordonnées de e_n dans \mathcal{B} .

D'après la question précédente

$$e_{n-2k} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} f_{2i+j}$$

Donc, pour $k = 0$,

$$\begin{aligned}
 e_n &= \sum_{j=0}^n (-1)^0 \binom{0}{0} \binom{n-2 \times 0}{j} f_{2 \times 0 + j} \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f_j
 \end{aligned}$$

Le vecteur coordonnées en ligne de e_n dans \mathcal{B} est

$$\left(\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \dots \quad \binom{n}{n} \right).$$

Déterminons les coordonnées de e_{n-2} dans \mathcal{B} .

D'après la question précédente

$$e_{n-2k} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} f_{2i+j}$$

Donc, pour $k = 1$,

$$\begin{aligned} e_{n-2} &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^{n-2 \times 1} (-1)^{1-i} \binom{1}{i} \binom{n-2}{j} f_{2i+j} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{1-0} \binom{1}{0} \binom{n-2}{j} f_{2 \times 0 + j} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{1-1} \binom{1}{1} \binom{n-2}{j} f_{2 \times 1 + j} \right) \\ &= \left(- \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} f_j \right) + \left(\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} f_{2+j} \right) \end{aligned}$$

Nous observons un télescopage des termes :

$$\begin{aligned} e_{n-2} &= \left(- \sum_{j=0}^1 \binom{n-2}{j} f_j \right) + \left(\sum_{j=n-3}^{n-2} \binom{n-2}{j} f_{2+j} \right) \\ &= -f_0 - (n-2)f_2 + (n-2)f_{n-1} + f_n \end{aligned}$$

Le vecteur coordonnées en ligne de e_{n-2} dans \mathcal{B} est

$$(-1 \quad -(n-2) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (n-2) \quad 1).$$

(c) Montrer que e_{2k-n} est dans F_n .

Justifions que : $e_{2k-n} \in F_n$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 e_{2k-n}(x) &= \exp((2k-n)x) \\
 &= \exp((n-2k)(-x)) \\
 &= e_{n-2k}(-x) \\
 &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} f_{2i+j}(-x) \\
 &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} \operatorname{sh}^{2i+j}(-x) \operatorname{ch}^{n-(2i+j)}(-x)
 \end{aligned}$$

Et puisque sh est impaire et que ch est paire :

$$\begin{aligned}
 e_{2k-n}(x) &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} (-1)^{2i+j} \operatorname{sh}^{2i+j}(x) \operatorname{ch}^{n-(2i+j)}(x) \\
 &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{k-i+2i+j} \binom{k}{i} \binom{n-2k}{j} f_{2i+j}(x)
 \end{aligned}$$

e_{2k-n} peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'élément de \mathcal{B} donc

$$e_{2k-n} \in F_n.$$

13. Pour j entier naturel avec $0 \leq j \leq n$, exprimer la dérivée f'_j en fonction de vecteurs de la famille (f_0, f_1, \dots, f_n) .

Soit $j \in [0, n]$.

Exprimons f'_j .

* Supposons $0 < j < n$.

f_j est un produit de puissances de fonctions sh et ch qui sont dérivables sur \mathbb{R} donc f_j est dérivable sur \mathbb{R} et l'énoncé nous donne les dérivées de sh et ch donc

$$\begin{aligned}
 f'_j &= (j \operatorname{ch} \cdot \operatorname{sh}^{j-1}) \cdot \operatorname{ch}^{n-j} + \operatorname{sh}^j \cdot ((n-j) \operatorname{sh} \cdot \operatorname{ch}^{n-j-1}) \\
 &= j \operatorname{sh}^{j-1} \operatorname{ch}^{n-(j-1)} + (n-j) \operatorname{sh}^{j+1} \operatorname{ch}^{n-(j+1)}
 \end{aligned}$$

- * Si $j = 0$ alors $f'_0 = n \operatorname{sh} \cdot \operatorname{ch}^{n-1} = n f_1$.
- * Si $j = n$ alors $f'_n = n \operatorname{ch} \cdot \operatorname{sh}^{n-1} = n f_{n-1}$.

Finalement

$$f'_0 = n f_1, f'_n = n f_{n-1} \text{ et } f'_j = j f_{j-1} + (n-j) f_{j+1} \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket.$$

14. Montrer que l'application $u_n : f \mapsto f'$ réalise un endomorphisme de F_n et donner la matrice de u_n dans la base \mathcal{B} .

Montrons que u_n est un endomorphisme.

D'après la question précédente, u_n est effectivement une application de F_n dans lui-même : tout élément de F_n est une combinaison linéaire de f_j et les dérivées des f_j sont encore des combinaisons linéaires de f_j donc des éléments de F_n .

u_n est bien sûr linéaire puisque la dérivation est linéaire.

$$u_n \text{ est un endomorphisme de } F_n.$$

Déterminons la matrice de u_n relativement à la base \mathcal{B} .

D'après la question précédente, $u_n(f_0) = n f_1$, $u_n(f_n) = n f_{n-1}$ et si $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ alors $u_n(f_j) = j f_{j-1} + (n-j) f_{j+1}$.

Par conséquent

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u_n) = B_n.$$

15. Soit λ un réel. Quelles sont les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} vérifiant $f' = \lambda f$? (on pourra calculer la dérivée de $x \mapsto \exp(-\lambda x) f(x)$)

Déterminons les fonctions f dérivables telles que $f' = \lambda f$ en raisonnant par analyse-synthèse.

- * Supposons qu'il existe une fonction f dérivable telle que $f' = \lambda f$.

Notons $h : x \mapsto \exp(-\lambda x) f(x)$.

h est dérivable (comme produit de fonctions dérivables) sur \mathbb{R} et quelque soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= -\lambda \exp(-\lambda x) f(x) + \exp(-\lambda x) f'(x) \\
 &= [-\lambda f(x) + f'(x)] \exp(-\lambda x) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Par conséquent il existe un nombre réel μ tel que $h(x) = \mu$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Autrement dit

$$\exp(-\lambda x) f(x) = \mu$$

D'où :

$$f(x) = \mu \exp(\lambda x)$$

* Soit μ un nombre réel. Notons $f(x) = \mu \exp(\lambda x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Il est clair que f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lambda \mu \exp(\lambda x) \\
 &= \lambda f(x)
 \end{aligned}$$

Nous avons démontré en raisonnant par analyse-synthèse que
l'ensemble des fonctions f dérivables telles que $f' = \lambda f$ est

$$\{x \mapsto \mu \exp(\lambda x) \mid \mu \in \mathbb{R}\}.$$

16. Montrer que les valeurs propres de u_n sont les entiers de l'ensemble

$$\{\pm n, \pm(n-2), \dots, \pm(n-2p)\}$$

où $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (partie entière de $\frac{n}{2}$) et qu'un vecteur associé à la valeur propre $\varepsilon(n-2k)$ pour $0 \leq k \leq p$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ est l'application $e_{\varepsilon(n-2k)}$.

Démontrons qu'il s'agit effectivement des valeurs propres et de vecteurs propres de u_n .

D'après la question 12, e_{n-2k} et e_{2k-n} sont dans F_n .

D'après la question 15, $e_{\varepsilon(n-2k)}$ est bien un vecteur propre de u_n associé à la valeur propre $\varepsilon(n-2k)$.

Il est aisé de vérifier, en distinguant les cas n pair et n impair, qu'il y a donc $n + 1$ valeurs propres distinctes. Nous les avons donc toutes trouvées.

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u_n) = \{\pm n, \pm(n-2), \dots, \pm(n-2p)\} \text{ et, pour } k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \\ e_{\varepsilon(n-2k)} \text{ est un vecteur propre associé à la valeur propre } \varepsilon(n-2k).$$

17. La matrice B_n est-elle diagonalisable ?

Puisque $B_n = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u_n)$, d'après la question précédente B_n admet $n + 1$ valeurs propres distinctes donc

$$B_n \text{ est diagonalisable.}$$

18. Montrer que $\frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-1} & 1 \end{pmatrix}$ est l'unique matrice ligne $L = (\ell_1 \ \ell_2 \ \dots \ \ell_{n+1})$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \ell_i = 1 \quad \text{et} \quad LA'_n = L$$

Démontrons l'existence et l'unicité en raisonnant par analyse-synthèse.

* Supposons qu'il existe L telle que $LA'_n = L$ et $\sum_{i=0}^n \ell_i = 1$.
De $LA'_n = L$ nous déduisons successivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} LA_n &= L \\ LA_n &= nL \\ A_n^T L^T &= nL^T \\ B_n L^T &= nL^T \end{aligned}$$

Donc L^T est un vecteur propre associé à la valeur propre n pour B_n ou bien le vecteur nul. Puisque $\sum_{i=0}^n \ell_i = 1$, L^T n'est pas nul.

Puisque B_n admet $n + 1$ valeurs propres distinctes, le sous-espace propre associé à chaque valeur propre est de dimension 1. En particulier celui associé à la valeur propre n est engendré par $\text{mat}_{\mathcal{B}}(e_n)$. Par conséquent il existe un unique $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $L^T = \mu \text{mat}_{\mathcal{B}}(e_n)$.

Or, d'après la question 12 $\text{mat}_{\mathcal{B}}(e_n)^T = \left(\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \dots \quad \binom{n}{n} \right)$ donc nécessairement :

$$\mu \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 1.$$

De $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ nous déduisons que $\mu = \frac{1}{2^n}$.

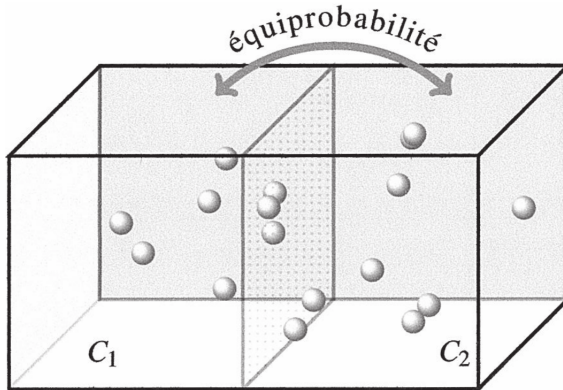
Ainsi : $L = \frac{1}{2^n} \left(\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \dots \quad \binom{n}{n} \right)$.

* Réciproquement, notons $L = \frac{1}{2^n} \left(\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \dots \quad \binom{n}{n} \right)$ nous vérifions immédiatement que $LA'_n = L$ et $\sum_{i=0}^n \ell_i = 1$.

Nous avons établi par analyse-synthèse que L est bien l'unique vecteur ligne vérifiant les deux conditions imposées.

Partie B : diffusion des particules.

Une boîte contient n particules ; cette boîte est séparée en deux boîtes notées C_1 et C_2 par une membrane poreuse. On modélise le passage des particules d'une boîte à l'autre de la façon suivante. À chaque instant entier, on choisit une des n particules avec équiprobabilité et on la transfère dans l'autre boîte. Les tirages sont supposés indépendants.



On admet qu'il existe un espace probabilisé $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que pour tout p de \mathbb{N} , le nombre de particules dans la boîte C_1 à l'instant p définit une variable aléatoire X_p sur \mathcal{E} .

Si A est un événement élément de \mathcal{A} , si $0 \leq k \leq n$ et si $\mathbb{P}(X_p = k) = 0$, on pose par convention $\mathbb{P}(A/X_p = k) = 0$. Avec cette convention, on a la formule que

l'on pourra admettre :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A/X_p = k)\mathbb{P}(X_p = k).$$

L'espérance d'une variable aléatoire discrète finie sera notée $\mathbb{E}(X)$.
On note enfin, pour p dans \mathbb{N} , L_p la matrice ligne :

$$L_p = (\mathbb{P}(X_p = 0) \quad \mathbb{P}(X_p = 1) \quad \dots \quad \mathbb{P}(X_p = n)).$$

19. Déterminer L_{p+1} en fonction de L_p en utilisant la matrice A'_n et en déduire L_p en fonction de A'_n , p et L_0 .

Déterminons l_{p+1} en fonction de L_p en utilisant A'_n .

À chaque instant p une particule est déplacée d'un côté vers l'autre.

- * Si à l'instant p il n'y a aucune particule dans C_1 alors nécessairement $X_{p+1} = 1$ et donc $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 \mid X_p = 0) = 1$.
- * Si à l'instant p toutes les particules sont dans C_1 alors nécessairement $X_{p+1} = n - 1$ et donc $\mathbb{P}(X_{p+1} = n - 1 \mid X_p = n) = 1$.
- * Si à l'instant p il y a $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ particules dans C_1 , alors $X_{p+1} \in \{k - 1, k + 1\}$.

De plus comme le choix de la particule déplacée est fait avec équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = k - 1 \mid X_p = k) = \frac{k}{n}$$

(la particule quitte C_1) et

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = k + 1 \mid X_p = k) = \frac{n - k}{n} \mathbb{P}(X_p = k)$$

(la particule arrive dans C_1)

Soit $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

Un embranchement de l'arbre probabiliste représentant cette situation pourrait clarifier les choses.

D'après la formule des probabilités totales que nous avons fourni l'énoncé

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = i) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_{p+1} = i \mid X_p = k) \mathbb{P}(X_p = k)$$

X_{p+1} et X_p ne peuvent différer que de 1 exactement donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{p+1} = i) &= \sum_{k \in \{i-1, i+1\}} \mathbb{P}(X_{p+1} = i \mid X_p = k) \mathbb{P}(X_p = k) \\ &= \mathbb{P}(X_{p+1} = i \mid X_p = i-1) \mathbb{P}(X_p = i-1) + \\ &\quad \mathbb{P}(X_{p+1} = i \mid X_p = i+1) \mathbb{P}(X_p = i+1) \end{aligned}$$

Puisque le choix de la particule à déplacer se fait de manière équiprobable :

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = i) = \frac{n - (i - 1)}{n} \mathbb{P}(X_p = i - 1) + \frac{i + 1}{n} \mathbb{P}(X_p = i + 1)$$

En raisonnant de même nous établissons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{p+1} = 0) &= \mathbb{P}(X_{p+1} = 0 \mid X_p = 1) \mathbb{P}(X_p = 1) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{P}(X_p = 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{p+1} = n) &= \mathbb{P}(X_{p+1} = n \mid X_p = n - 1) \mathbb{P}(X_p = n - 1) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{P}(X_p = n - 1) \end{aligned}$$

Il est alors aisé de vérifier (par le calcul) que

$$L_p A'_n = L_{p+1}.$$

Déterminons L_p en fonction de A'_n , p et L_0 .

Nous remarquons que par une récurrence évidente ($L_p = L_{p-1} A_n^1 = L_{p-2} A_n^2 = L_{p-3} A_n^3 = \dots = L_0 A_n^p$) nous obtenons

$$L_p = L_0 A_n^p.$$

20. On suppose dans cette question que X_0 suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

Quelle la loi suivie par X_p ? Quelle est son espérance et sa variance?

Déterminons la loi suivie par X_p .

Puisque X_0 suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, quelque soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$\mathbb{P}(X_0 = i) = \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}.$$

$$\text{Donc } L_0 = \frac{1}{2^n} \left(1 \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \dots \quad \binom{n}{n-1} \quad 1 \right).$$

D'après la question 18 : $L_0 = L_0 A'_n$, et par conséquent, quelque soit $p \in \mathbb{N}$, $L_p = L_0$.

Nous en déduisons :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X_p = i) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i}.$$

On revient au cas général.

21. Montrer que pour tout p entier naturel :

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \left(\frac{n-2}{n}\right) \mathbb{E}(X_p) + 1$$

et en déduire l'espérance de X_p en fonction de n , p et $\mathbb{E}(X_0)$ (on pourra étudier $\mathbb{E}(X_p) - \frac{n}{2}$).

Démontrons l'égalité proposée.

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_{p+1} = k)k$$

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \mathbb{P}(X_{p+1} = n)n + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_{p+1} = k)k$$

D'après la question 19

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(X_p = n-1)n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-(k-1)}{n} \mathbb{P}(X_p = k-1) + \frac{k+1}{n} \mathbb{P}(X_p = k+1) \right) k$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) &= \mathbb{P}(X_p = n - 1) + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n - (k - 1))k\mathbb{P}(X_p = k - 1) + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (k + 1)k\mathbb{P}(X_p = k + 1)\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $i = k - 1$ dans la première somme et $j = k + 1$ dans la seconde

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) &= \mathbb{P}(X_p = n - 1) + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-2} (n - i)(i + 1)\mathbb{P}(X_p = i) + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n j(j - 1)\mathbb{P}(X_p = j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) &= \mathbb{P}(X_p = n - 1) + \mathbb{P}(X_p = 0) + \frac{2(n - 1)}{n}\mathbb{P}(X_p = 1) \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n-2} (n - i)(i + 1)\mathbb{P}(X_p = i) + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n-2} j(j - 1)\mathbb{P}(X_p = j) + \\ &\quad \frac{(n - 1)(n - 2)}{n}\mathbb{P}(X_p = n - 1) + (n - 1)\mathbb{P}(X_p = n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) &= \mathbb{P}(X_p = n - 1) + \mathbb{P}(X_p = 0) + \frac{2(n - 1)}{n}\mathbb{P}(X_p = 1) \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n-2} [(n - i)(i + 1) + i(i - 1)]\mathbb{P}(X_p = i) + \\ &\quad \frac{(n - 1)(n - 2)}{n}\mathbb{P}(X_p = n - 1) + (n - 1)\mathbb{P}(X_p = n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) &= \mathbb{P}(X_p = n - 1) + \mathbb{P}(X_p = 0) + \frac{2(n-1)}{n}\mathbb{P}(X_p = 1) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n-2} [(n-2)i + n] \mathbb{P}(X_p = i) + \\ &\quad \frac{(n-1)(n-2)}{n} \mathbb{P}(X_p = n-1) + (n-1)\mathbb{P}(X_p = n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) &= \mathbb{P}(X_p = n - 1) + \mathbb{P}(X_p = 0) + \frac{2(n-1)}{n}\mathbb{P}(X_p = 1) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n-2} (n-2)i\mathbb{P}(X_p = i) + \\ &\quad \sum_{i=2}^{n-2} \mathbb{P}(X_p = i) + \\ &\quad \frac{(n-1)(n-2)}{n} \mathbb{P}(X_p = n-1) + (n-1)\mathbb{P}(X_p = n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) &= \mathbb{P}(X_p = n - 1) + \mathbb{P}(X_p = 0) + \frac{2(n-1)}{n}\mathbb{P}(X_p = 1) \\ &\quad + \frac{n-2}{n}\mathbb{E}(X_p) - \frac{n-2}{n}1\mathbb{P}(X_p = 1) - \frac{n-2}{n}(n-1)\mathbb{P}(X_p = n-1) \\ &\quad - \frac{n-2}{n}n\mathbb{P}(X_p = n) + \\ &\quad 1 - \mathbb{P}(X_p = 0) - \mathbb{P}(X_p = 1) - \mathbb{P}(X_p = n-1) - \mathbb{P}(X_p = n) + \\ &\quad \frac{(n-1)(n-2)}{n}\mathbb{P}(X_p = n-1) + (n-1)\mathbb{P}(X_p = n)\end{aligned}$$

Nous remarquons certains simplifications :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{p+1}) &= \mathbb{P}(X_p = n - 1) + \mathbb{P}(X_p = 0) + \frac{2(n-1)}{n}\mathbb{P}(X_p = 1) \\ &\quad + \frac{n-2}{n}\mathbb{E}(X_p) - \frac{n-2}{n}\mathbb{P}(X_p = 1) - \frac{n-2}{n}(n-1)\mathbb{P}(X_p = n-1) \\ &\quad - (n-2)\mathbb{P}(X_p = n) + \\ &\quad 1 - \mathbb{P}(X_p = 0) - \mathbb{P}(X_p = 1) - \mathbb{P}(X_p = n-1) - \mathbb{P}(X_p = n) + \\ &\quad \frac{(n-1)(n-2)}{n}\mathbb{P}(X_p = n-1) + (n-1)\mathbb{P}(X_p = n)\end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbb{E}(X_{p+1}) = \frac{n-2}{n}\mathbb{E}(X_p) + 1.$$

Déterminons $\mathbb{E}(X_p)$.

Soit $p > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{p+1}) - \frac{n}{2} &= \frac{n-2}{n}\mathbb{E}(X_p) + 1 - \frac{n}{2} \\ &= \frac{n-2}{n}\left(\mathbb{E}(X_p) - \frac{n}{2}\right) + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n}{2} + 1 - \frac{n}{2} \\ &= \frac{n-2}{n}\left(\mathbb{E}(X_p) - \frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\left(\mathbb{E}(X_p) - \frac{n}{2}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $\mathbb{E}(X_0) - \frac{n}{2}$ et de raison $\frac{n-2}{n}$. Par conséquent :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_p) - \frac{n}{2} = \left(\frac{n-2}{n}\right)^p \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{n}{2}\right).$$

Enfin

$$\forall p \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_p) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^p \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2}.$$

22. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X_p)$ lorsque p tend vers $+\infty$? Ce résultat vous semble-t-il conforme à l'intuition?

Déterminons la limite de $\mathbb{E}(X_p)$.

$n \geq 2$ donc $0 \leq \frac{n-2}{n} < 1$ et

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Nous en déduisons, d'après la question précédente,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_p) = \frac{n}{2}.$$

On s'attend effectivement à ce que, si l'expérience dure indéfiniment, en moyenne, à chaque instant, il y ait autant de particules dans les deux boîtes.

23. Une modélisation physique stipule que la pression P_p dans la boîte C_1 à l'instant p est l'ordre de $P_p = \mathbb{E} \left(\frac{X_p}{n} \right)$.

On note t la fréquence de transitions par seconde et on suppose que $p = nt$ (temps mis pour effectuer n transitions).

Exprimer la limite de P_{nt} lorsque n tends vers $+\infty$ en fonction de t et de P_0 seulement. Ceci établit une loi de refroidissement due à Isaac Newton.

Exprimons la limite de P_{nt} lorsque n tends vers $+\infty$.

D'après la question 21

$$\begin{aligned} P_p &= \mathbb{E} \left(\frac{X_p}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}(X_p) \end{aligned}$$

D'après la question 21

$$\begin{aligned} P_p &= \frac{1}{n} \left[\left(\frac{n-2}{n} \right)^p \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{n}{2} \right) + \frac{n}{2} \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\left(\frac{n-2}{n} \right)^p n \left(P_0 - \frac{1}{2} \right) + \frac{n}{2} \right] \\ &= \left(\frac{n-2}{n} \right)^p \left(P_0 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où

$$P_{nt} = \left(\frac{n-2}{n} \right)^{nt} \left(P_0 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

Déterminons la limite de cette dernière expression.

$$\left(\frac{n-2}{n} \right)^{nt} = \exp \left[tn \ln \left(1 - \frac{2}{n} \right) \right]$$

Or en utilisant un développement de \ln

$$\begin{aligned} n \ln \left(1 - \frac{2}{n} \right) &= n \left[-\frac{2}{n} - \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] \\ &= -2 - \frac{2}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

donc

$$\left(\frac{n-2}{n} \right)^{nt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(-2t)$$

Nous en déduisons finalement

$$P_{nt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(-2t) \left(P_0 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}.$$