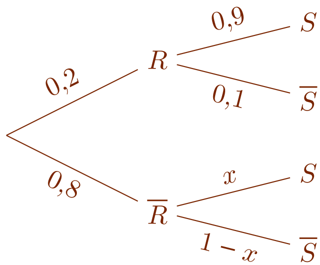
Bac 2023/03/29 La Réunion.

Exercice 1. 5 points

Partie A.

1.



2. Déterminons x.

   $\{R,\overline{R}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(R \cap S) + \mathbb{P}(\overline{R} \cap S)$$

   Puisque $\mathbb{P}(R) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{R}) \neq 0$, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(S) + \mathbb{P}(\overline{R}) \times \mathbb{P}_{\overline{R}}(S)\\ &= 0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}8 \times x\\ &= 0{,}8x + 0{,}18\end{aligned}$$

   Or, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(S) = 0{,}82$ donc

$$0{,}82 = 0{,}8x + 0{,}18$$

   équation du premier degré qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}0{,}82-0{,}18 &= 0{,}8x + 0{,}18-0{,}18\\ 0{,}64 &= 0{,}8x\\ \frac{0{,}64}{0{,}8} &= \frac{0{,}8x}{0{,}8}\\ 0{,}8 &= x\end{aligned}$$

$$x = 0{,}8.$$

3. Calculons $\mathbb{P}_S(R)$.

   Par définition de la probabilité conditionnelle, et puisque $\mathbb{P}(S) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_S(R) &= \frac{\mathbb{P}(R \cap S)}{\mathbb{P}(S)}\\ &= \frac{0{,}2 \times 0{,}9}{0{,}82}\\ &\approx 0{,}219 \text{ en tronquant.}\end{aligned}$$

   En arrondissant à 10^{-2}

$$\mathbb{P}_S(R) \approx 0{,}22.$$

Partie B.

1. (a) $$X \hookrightarrow \mathscr{B}(5; 0{,}82).$$

   (b) Calculons $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$.

   Avec la calculatrice :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 5) \approx 0{,}2223\text{en tronquant.}$$

   En arrondissant à 10^{-3} : $\mathbb{P}(X \leqslant 3) \approx 0{,}222$.

2. (a) Calculons p_n.

   Soit X_n la variable aléatoire au choix des n clients associe le nombre de clients satisfaits.
   $X_n \hookleftarrow \mathscr{B}(n; 0{,}82)$ et donc

$$\begin{aligned}p_n &= \mathbb{P}(X = n)\\ &= \binom{n}{n} \times 0{,}82^n \times (1 - 0{,}82)^{n-n}\\ &= 1 \times 0{,}82^n \times 1\end{aligned}$$

$$p_n = 0{,}82^n.$$

(b) Résolvons dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $p_n < 0{,}01$.

$$p_n < 0{,}01 \iff 0{,}82^n < 0{,}01$$

Puisque ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est strictement croissante :

$$\begin{aligned} p_n < 0{,}01 &\iff \ln\left(0{,}82^n\right) < \ln(0{,}01) \\ &\iff n\ln(0{,}82) < \ln(0{,}01) \end{aligned}$$

Puisque $0{,}82 < 1$, $\ln(0{,}82) < 0$ et donc

$$\begin{aligned} p_n < 0{,}01 &\iff \frac{n\ln(0{,}82)}{\ln(0{,}82)} > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}082)} \\ &\iff n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}82)} \end{aligned}$$

Or $n \in \mathbb{N}$ et $23{,}2 < frac\ln(0{,}01)\ln(0{,}82) < 23{,}21$ donc

$$p_n < 0{,}01 \iff n \geqslant 24$$

$p_n < 0{,}01$ si et seulement si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 24$.

Exercice 2. 5 points

1. Calculons u_1.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{6u_0 + 2}{u_n + 5} \\ &= \frac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} \end{aligned}$$

$$u_1 = \frac{50}{13}.$$

2. (a) Étudions la monotonie de f.

$f = \frac{u}{v}$ où $u : x \mapsto 6x+5$ et $v : x \mapsto x+5$. Comme u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que v ne s'annule qu'en -5, f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Puisque $u' = 6$ et $v' = 1$, de $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ nous déduisons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6\times(x+5)-(6x+2)\times 1}{(x+5)^2} \\ &= \frac{28}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

Clairement $f' > 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

Démontrons que si $x > 2$ alors $f(x) > 2$.

Soit $x > 2$.
Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$f(x) > f(2).$$

Or $f(2) = \frac{6\times 2+2}{2+5} = 2$ donc $f(x) > 2$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x > 2 \Rightarrow f(x) > 2.}$$

(b) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n > 2$ ».

Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* $u_0 = 8 > 2$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et démontrons qu'alors $(n+1)$ est vraie.
  Par hypothèse de récurrence : $u_n > 2$. Puisque f est strictement croissante sur $]2; +\infty[$, $f(u_n) > f(2)$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(2) = 2$ donc $u_{n+1} > 2$.
  $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
* Nous avons donc démontré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2.$$

3. (a) Étudions la monotonie de (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n > 2$ donc $2 - u_n < 0$, $u_n + 1 > 0$ et $u_n + 5 > 0$. Par produit et quotient : $u_{n+1} - u_n < 0$.
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(u_n) est strictement décroissante.

(b) Justifions la convergence de (u_n).

(u_n) est décroissante et minorée par 2 donc, d'après le théorème de la limite monotone,

(u_n) converge.

4. (a) Calculons v_0.

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} \\ &= \frac{8 - 2}{8 + 1} \end{aligned}$$

$$v_0 = \frac{2}{3}.$$

(b) Démontrons que (v_n) est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1}\\
&= \frac{\frac{6u_n+2}{u_n+5}-2}{\frac{6u_n+2}{u_n+5}+1}\\
&= \frac{\frac{6u_n+2-2(u_n+5)}{u_n+5}}{\frac{6u_n+2+u_n+5}{u_n+5}}\\
&= \frac{4u_n-8}{u_n+5}\times\frac{u_n+5}{7u_n+7}\\
&= \frac{4(u_n-2)}{7(u_n+1)}\\
&= \frac{4}{7}\times\frac{u_n-2}{u_n+1}\\
&= \frac{4}{7}\times v_n
\end{aligned}$$

(v_n) est géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

(c) Étudions la convergence de (v_n).

(v_n) est géométrique de raison $\frac{4}{7}$ et de terme initial $u_0 = \frac{2}{3}$ donc, pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{7}\right)^n.$$

Puisque $-1 < \frac{4}{7} < 1$, $\left(\frac{4}{7}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Finalement, par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

Déterminons la limite de (u_n).

Notons ℓ la limite de (u_n).

$x \mapsto \frac{x-2}{x+1}$ étant continue sur $]2;+\infty[$, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}$ nous obtenons

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\ell - 2}{\ell + 1} \\
0 &= \ell - 2 \\
0+2 &= \ell - 2+2 \\
2 &= \ell
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.}$$

5. $\boxed{\text{Le programme renvoie 10.}}$

u_{10} est la première valeur de (u_n) qui s'approche de la imite 2 à 0,01 près (forcément par excès).

Exercice 3.

1. Déterminons une représentation paramétrique de (d).

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.
Puisque (d) contient A et admet $\vec{u}$ pour vecteur directeur, $M \in (d)$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.
Cette dernière égalité équivaut successivement à

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \times 0 \\ t \times 2 \\ t \times (-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ y - 1 &= 2t \\ z &= -t \end{aligned}\right.$$

$$(d) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. Démontrons que $B \in \mathcal{P} \cap (d)$.

   (a) $1 + 4 \times (-1) + 2 \times 1 + 1 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}$.

   (b) Si $B \in (d)$ alors, puisque $z_B = 1$, nécessairement $t_B = -1$.
   Réciproquement, si $t = -1$ alors le point de coordonnées $(1; 2 \times (-1) + 1; 1)$ appartient à (d). Autrement dit $B \in (d)$.
   Ainsi $B \in (d)$.

B appartient à $\mathcal{P}$ et (d).

Démontrons que $\mathcal{P}$ et (d) sont sécants.

De l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ nous déduisons que $\vec{\nu}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Ainsi $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{\nu}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$. Or $\begin{vmatrix}0 & 1\\2 & 4\end{vmatrix} = 0 \times 4 - 2 \times 1 = -2$ donc $\vec{u}$ et $\vec{\nu}$ ne sont pas colinéaires.

$\mathcal{P}$ et (d) sont sécants.

3. (a) Justifions que A, B et C définissent un plan.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

   * $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$.
   * $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires puisque $\begin{vmatrix}-2 & -1\\1 & -1\end{vmatrix} = -2 \times (-1) - 1 \times 0 = 2 \neq 0$.

$$\boxed{A,\ B \text{ et } C \text{ définissent un plan.}}$$

(b) Démontrons que $\vec{n}$ est normal à (ABC).

* $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times 1 = 0.$
* $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 0 + 0 \times (-1) + 0 \times (-1) = 0.$

Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs d'une base de la direction de (ABC) donc

$$\boxed{\vec{n} \text{ est normal à } (ABC).}$$

(c) Déterminons une équation cartésienne de (ABC).

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.
$M \in (ABC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Ce qui équivaut encore successivement à

$$\begin{aligned} (x-1) \times 1 + (y-1) \times 0 + (z-0) \times 0 &= 0 \\ x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{(ABC) :\ x = 1.}$$

4. (a) Démontrons que ABCest isocèle en A.

Le repère étant orthonormé norme et longueur se confondent.

$$\begin{aligned} AB &= ||\overrightarrow{AB}|| \\ &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \\ &= \sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

De même : $AC = \sqrt{5}$ et donc $AB = AC$ et

$$\boxed{ABC \text{ est isocèle en } A.}$$

(b) Calculons AH.

* Puisque H est le milieu de $[BC]$

$$x_H = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

De même $y_H = -1$ et $z_H = 0$.
Ainsi $H(1;-1;0)$.

* $AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(1-1)^2 + (1-(-1))^2 + (0-0)^2}$.

$$\boxed{AH = 2.}$$

Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABC)$ de ABC.

ABC étant isocèle en A, le milieu H de $[BC]$ est aussi le pied de la hauteur issue de A et donc

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times AH$$

Or il est aisé de vérifier que $BC = 2$ donc

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ABC) = 2.}$$

5. (a) Démontrons que (BD) est la hauteur de $ABCD$ issue de D.

$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DB} = \vec{n}$.

Or $\vec{n}$ est normal à (ABC) donc $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$.
Nous en déduisons que (DB) est perpendiculaire à (ABC).

$$\boxed{(DB) \text{ est la hauteur de } ABCD \text{ issue de } D.}$$

(b) Calculons le volume $\mathscr{V}$ de $ABCD$.

Puisque (BD) est la hauteur de $ABCD$ issue de D :

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}(ABC) \times BD \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V} = 1.}$$

Exercice 4. 5 points

1. Réponse c.

2. Réponse a.

3. Réponse d.

4. Réponse b.

5. Réponse a.