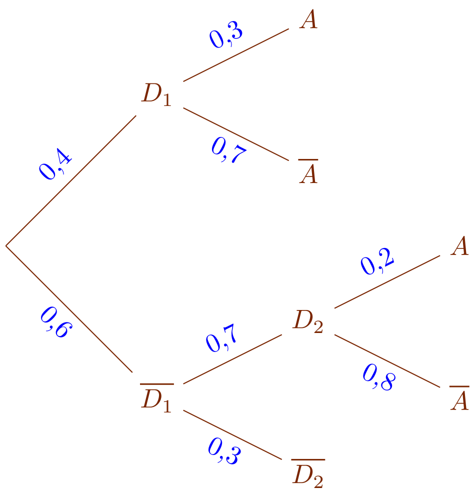
# Bac 2023/03/28 La Réunion.

## Exercice 1. 5 points

### Partie A.

1.




2. Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   $\{D_1,\overline{D_1}\cap D_2,\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\}$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cap D_1)+\mathbb{P}\left[A\cap\left(\overline{D_1}\cap D_2\right)\right]+\mathbb{P}\left[A\cap\left(\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\right)\right]$$

   Comme $\mathbb{P}(D_1)$, $\mathbb{P}(\overline{D_1}$ et $\mathbb{P}(\overline{D_1}\cap D_2)$ sont non nulles, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)&=\mathbb{P}(D_1)\times\mathbb{P}_{D_1}(A)+\mathbb{P}(\overline{D_1})\times\mathbb{P}_{\overline{D_1}}(D_2)\times\mathbb{P}_{\overline{D_1}\cap D_2}(A)+0\\&=0{,}4\times0{,}3+0{,}6\times0{,}7\times0{,}2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A)=0{,}204.}$$

3. Calculons $\mathbb{P}_A(D_1)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle et puisque $\mathscr{P}(A) \neq 0$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(D_1) &= \frac{\mathbb{P}(D_1 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{0{,}4 \times 0{,}3}{0{,}204} &\approx 0{,}588235 \text{ en tronquant.}\end{aligned}$$

En arrondissant à $10^{-4}$ : $\mathbb{P}_A(D_1) \approx 0{,}5882$.

## Partie B.

1. (a) $X \hookrightarrow \mathscr{B}(30; 0{,}204)$.

(b) Calculons $\mathbb{P}(X = 6)$.

Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(30; 0{,}204)$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 6) &= \binom{30}{6} \times 0{,}204^6 \times (1 - 0{,}204)^{30-6} \\ &\approx 0{,}1791 \text{ en tronquant.}\end{aligned}$$

En arrondissant à $10^{-3}$ : $\mathbb{P}(X = 6) \approx 0{,}179$.

(c) Calculons $\mathbb{E}(X)$.

Puisque $X \hookleftarrow \mathscr{B}(30; 0{,}204)$ :

$$\mathbb{E}(X) = 30 \times 0{,}204$$

$\mathbb{E}(X) = 6{,}12$.

Ce que nous pouvons interpréter par :

> si on recommence un grand nombre de fois le choix d'un échantillon de 30 personnes, en moyenne il y aura 6,12 acheteurs parmi les 30.

2. Soit $X_n$ la variable aléatoire qui à un échantillon de $n$ personnes associe le nombre de personnes qui achètent le produit.

   Déterminons $n$ pour que $\mathbb{P}(Y_n \geqslant 0{,}99)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 &\iff 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\{Y_n \geqslant 1\}}\right) \geqslant 0{,}99 \\
&\iff 1 - \mathbb{P}(Y_n < 1) \geqslant 0{,}99 \\
&\iff 1 - \mathbb{P}(X = 0) \geqslant 0{,}99 \\
&\iff 1 - \mathbb{P}(X = 0) - 1 \geqslant 0{,}99 - 1 \\
&\iff -\mathbb{P}(X = 0) \geqslant -0{,}01 \\
&\iff -1 \times (\mathbb{P}(X = 0)) \leqslant -1 \times (-0{,}01) \text{ car } -1 < 0 \\
&\iff \mathbb{P}(X = 0) \leqslant 0{,}01
\end{aligned}$$

Or, comme précédemment, $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n; 0{,}204)$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 &\iff \binom{n}{0} \times 0{,}204^0 \times (1 - 0{,}204)^{n-0} \leqslant 0{,}01 \\
&\iff 1 \times 1 \times 0{,}796^n \leqslant 0{,}01
\end{aligned}$$

ln est croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 &\iff \ln\left(0{,}796^n\right) \leqslant \ln(0{,}01) \\
&\iff n\ln(0{,}796) \leqslant \ln(0{,}01)
\end{aligned}$$

$0{,}796 < 1$ donc $\ln(0{,}796) < 0$ et par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 &\iff \frac{n\ln(0796)}{\ln(0{,}796)} \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}796)} \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}796)}
\end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}796)} \approx 20{,}18$, en tronquant, donc, $n$ étant entier :

$$\mathbb{P}(Y_n \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 \Longleftrightarrow n \geqslant 21$$

La plus petite valeur pour $n$ est donc 21.

## Exercice 2. 5 points

1. Recherchons la limite de $f$ en 0 par valeur supérieures.

   Par croissance comparée : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$.
   Donc en sommant :

   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1.$$

   Recherchons la limite de $f$ en $+\infty$

   .
   Remarquons la factorisation : $f(x) = x\left(3 + \frac{1}{x} - \ln(x)\right)$.

   * Clairement, par somme, $\lim_{x\to+\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3$.
   * Toujours par sommation, on en déduit : $\lim_{x\to+\infty} 3 + \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$.
   * Puis, par produit : $\lim_{x\to+\infty} x\left(3 + \frac{1}{x} - \ln(x)\right) = -\infty$.

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

2. (a) Calculons $f'$.

   * $f$ est une somme de produits de fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f$ est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
   * Notons $g(x) = x\ln(x)$. $g = uv$ où $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$, donc $g' = u'v + uv'$.
     Or $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$ donc

   $$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

* Nous en déduisons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_=^*$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 + 0 - 2(\ln(x) + 1) \\ &= 3 - 2\ln(x) - 2 \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 - 2\ln(x).}$$

(b) Étudions le signe de $f'$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Longleftrightarrow 1 - 2\ln(x) > 0 \\ &\Longleftrightarrow 1 - 2\ln(x) + 2\ln(x) > 0 + 2\ln(x) \\ &\Longleftrightarrow 1 > 2\ln(x) \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{2\ln(x)}{2}, \text{ car } 2 > 0 \end{aligned}$$

La fonction exponetielle étant strictement croissante et réalisant une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Longleftrightarrow e^{\frac{1}{2}} > \exp(\ln(x)) \\ &\Longleftrightarrow e^{\frac{1}{2}} > x \end{aligned}$$

De même : $f'x) = 0 \Longleftrightarrow x = e$.

Nous en déduisons

| $x$ | $0$ | | $e^{\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donnons le tableau de variation de $f$.

En utilisant les résultats précédemment établis et le fait que

$$\begin{aligned} f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) &= 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 1 - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 3\mathrm{e} + 1 - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} \\ &= 1 + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

| $x$ | $0$ | | $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | ‖ 1 | ↗ | $1 + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ | ↘ | $-\infty$ |

3. (a) Démontrons que $f(x) = 0$ admet une unique solution.

* D'après le tableau de variation, $f$ admet sur $\left]0; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$ un minorant égale à 1.
  Donc, si l'équation $f(x) = 0$ admet des solutions ce ne peut être que dans $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$.
* $f$ est continue et strictement décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$, donc $f$ réalise une bijection de $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$ sur

$$\begin{aligned} f\left(\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}, +\infty\right[\right) &= \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)\right] \\ &= \left]-\infty, 1 + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

Comme $0 \in \left]-\infty, 1 + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$, nous en déduisons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$.

$f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

(b) En tenant compte des remarques faites à la question précédente :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

4. Puisque $F$ est une primitive de $f$, $f$ est la fonction dérivée de $F$. Compte du tableau de signe obtenu à la question précédente nous pouvons affirmer

   $F$ est strictement décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} ; +\infty\right[$.

5. (a) Étudions la convexité de $f$.

   $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}_=^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 - 2\frac{1}{x} \\ &= -\frac{2}{x} \end{aligned}$$

   Puisque $f'' < 0$

   $f$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Dire que $f$ est concave équivaut à dire que

   $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de toutes ses tangentes.

   (b) Déterminons une équation $T$.

   La tangente cherchée à pour équation

$$T : \ y = f'(1) \times (x - 1) + f(1).$$

   Or $f'(1) = 1$ et $f(1) = 4$ donc

   $T : \ y = x + 4.$

(c) Puisque $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de toutes ses tangentes en particulier $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $T$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$f(x) \leqslant x + 4$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 3x + 1 - 2x\ln(x) &\leqslant x + 4 \\ -2x\ln(x) &\leqslant -2x + 3 \\ \ln(x) &\geqslant \frac{-2x+4}{-2x} \text{ car } -2x < 0 \\ \ln(x) &\geqslant 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\boxed{\ln(x) \geqslant 1 - \tfrac{1}{x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*.}$$

## Exercice 3. 5 points

### Partie A.

1. Réponse a.

2. Réponse b.

3. Réponse d.

### Partie B.

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ : « $n \leqslant u_n \leqslant n+3$ ».

   Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   * $u_0 = 3$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 0 + 3$.
     Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et démontrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  Par hypothèse de récurrence :

$$n \leqslant u_n \leqslant n+3$$

  Puisque $\frac{1}{2} > 0$ :

$$\frac{1}{2}n \leqslant \frac{1}{2}u_n \leqslant \frac{1}{2}(n+3)$$

  d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n+ \leqslant \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 \leqslant \frac{1}{2}(n+3) + \frac{1}{2}n + 1 \\ n \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{3}{2} + 1 \\ n \leqslant u_{n+1} \leqslant n + 2 + 1 \end{aligned}$$

  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant u_n \leqslant n+3.}$$

2. Étudions la limite de $(u_n)$.

   Puisque $n \leqslant u_n$ pour tout $n$ entier naturel et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par comparaison

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

3. Étudions la limite de $\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

   D'après la question B.1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{3}{n}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.}$$

## Exercice 4. 5 points

1. $$\boxed{F(1;1;1) \text{ et } C(0;1;0).}$$

2. Calculons les coordonnées de $M$.

   Puisque $M$ est le centre de $BCGF$, $M$ est le milieu de $[FC]$.
   Par conséquent :

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_F + x_C}{2} \\ &= \frac{1+0}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   De même : $y_M = 1$ et $z_M = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{M\left(\frac{1}{2};1\frac{1}{2}\right).}$$

   En raisonnant de même :

$$\boxed{N\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

3. (a) $H$, $F$ et $C$ sont distincts deux à deux et non alignés donc $\left(\overrightarrow{HF},\overrightarrow{FC}\right)$ est une base de la direction de $(HFC)$.
   Ainsi, pour montrer que $\overrightarrow{AG}$ est normal à $(HFC)$ il faut et il suffit de montrer que $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{HC}$.

   Démontrons que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HC} = 0$.

* Clairement $H(1;0;0)$.
* $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix} x_F - x_H \\ y_F - y_H \\ z_F - z_H \end{pmatrix}$, autrement dit $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$, ou encore $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
* De même $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
*
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HF} &= x_{\overrightarrow{AG}} \times x_{\overrightarrow{HF}} + y_{\overrightarrow{AG}} \times y_{\overrightarrow{HF}} + z_{\overrightarrow{AG}} \times z_{\overrightarrow{HF}} \\ &= 1 \times (-1) + 1 \times 1 + -1 \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

  De même : $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HC} = 0$.

$$\boxed{\overrightarrow{AG} \text{ est normal à } (HFC).}$$

(b) Déterminons une équation cartésienne de $(HFC)$.

Soit $M(x,y,z)$ un point du plan.
$M \in (HFC)$ si et seulement si $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AG}$.
Or

$$\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AG} = 0$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}(x-1)\times 1 + (y-0)\times 1 + (z-0)\times(-1) &= 0 \\ x+y-z-1 &= 0\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(HFC) :\ x+y-z-1=0.}$$

4. Déterminons une représentation paramétrique de $(AG)$.

$M \in (AG)$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.

Or $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$ équivaut à

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \times 1 \\ t \times 1 \\ t \times (-1) \end{pmatrix}$$

Autrement dit

$$\begin{cases} x - 0 = t \\ y - 0 = t \\ z - 1 = -t \end{cases}$$

Finalement

$$\boxed{(AG) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.}$$

5. Démontrons que $R$ est le projeté orthogonal de $G$ sur $(HFC)$.

   $R$ est le projeté orthogonal de $G$ sur $(HFC)$ si et seulement si $\overrightarrow{RG}$ est orthogonal aux deux vecteurs de la base $\left(\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{FC}\right)$ de la direction de $(HFC)$.

   On vérifie aisément : $\overrightarrow{RG}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ puis : $\overrightarrow{RG} \cdot \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{RG} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$.

   Enfin

   $$\boxed{R \text{ est le projeté orthogonal de } G \text{ sur } (HFC).}$$

6. Démontrons l'existence et l'unicité du point $K$.

   Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

   * Analyse. Supposons qu'il existe un point $K$ de $(FG)$ tel que $KMN$ soit rectangle en $K$.

     Puisque $K \in (FG)$ il existe $t_K \in \mathbb{R}$ tel que $K(1; 1; t_K)$.

     Donc $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ t_K - 1/2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NK}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ t_K - 1/2 \end{pmatrix}$.

     Puisque $KMN$ est rectangle en $K$ et puisque le repère est orthonormé, nécessairement : $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{NK} = 0$.

Cette dernière égalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times 0+0\times\frac{1}{2}+\left(t_K-\frac{1}{2}\right)^2 &= 0\\ t_K-\frac{1}{2} &= 0\\ t_K &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

À ce stade du raisonnement nous avons démontré que si un point $K$ existe ce ne peut être que $K\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$. Il nous reste à vérifier que ce point $K$ convient effectivement.

* Synthèse.
Soit $K\left(1;1.\frac{1}{2}\right)$.

On vérifie immédiatement que $K\in(GF)$ et $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{NK}=0$ autrement dit $KMN$ est rectangle en $K$.

Il existe une unique point $K\in(FG)$ tel que $KMN$ soit rectangle en $K$.

7. $\overrightarrow{KF}\cdot\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{KF}\cdot\overrightarrow{NK}=0$ et $KMN$ est rectangle en $K$, donc $[FK]$ est une hauteur du tétraèdre $FNKM$.
Puisque le repère est orthonormé,

$$\begin{aligned}FK &= ||\overrightarrow{FK}||\\ &= \sqrt{(x_K-x_F)^2+(y_K-y_F)^2+(z_K-z_F)^2}\\ &= \sqrt{(1-1)^2+(1-1)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

De même : $MK=NK=\frac{1}{2}$.
L'aire de $KMN$ est donc :

$$\mathscr{A}(KMN)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

et donc le volume de $FNKM$ est :

$$\mathscr{V}(FNKM)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{48}.$$

Enfin, le cube ayant un volume de 1,

$$\boxed{\text{le volume du tétraèdre représente une fraction de } \frac{1}{48}.}$$