Bac 2021 mathématiques première spécialité sujet public 061.

I Exercice. 5 points

1. Réponse C.

2. Réponse A.

3. Réponse C.

4. Réponse C.

5. Réponse D.

II Exercice. 5 points

1. (a) Calculons h_1.

La balle rebondi à $\frac{4}{5}$ de la hauteur précédente donc :

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{4}{5} \times h_0 \\ &= \frac{4}{5} \times 2 \\ &= 1{,}6 \end{aligned}$$

$h_1 = 1{,}6$ m.

De même : $h_2 = \frac{4}{5} \times h_1$, et donc

$$h_2 = 1{,}28 \text{ m.}$$

(b) En raisonnant comme à la question précédente :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_{n+1} = \frac{4}{5}h_n$.

(c) D'après la formule de récurrence obtenue à la question précédente :

$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de terme initial $h_0 = 1{,}6$ et de raison $q = \frac{4}{5}$.

(d) Déterminons le sens de variation de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous pourrions arguer de ce que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique positive et de raison $q \in]0;1[$ donc strictement décroissante mais nous allons le démontrer.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} h_{n+1} - h_n &= qh_n - h_n \\ &= \frac{4}{5} \times h_n - 1 \times h_n \\ &= (\frac{4}{5} - 1) \times h_n \end{aligned}$$

h_n désignant une hauteur c'est un nombre positif par contre $\frac{4}{5} - 1 < 0$ donc $h_{n+1} - h_n < 0$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_{n+1} < h_n$. Autrement dit

$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

2. Déterminons N.

La méthode la plus élémentaire consiste à calculer les premiers termes de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de proche en proche grâce à la formule de récurrence jusqu'à obtenir moins que 0,2.

Puisque $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de terme initial $h_0 = 1{,}6$ et de raison $\frac{4}{5}$, son terme général est $h_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \times 1{,}6$. Nous entrons cette formule (en remplaçant n par X) dans la calculatrice et nous consultons le tableau de valeur.

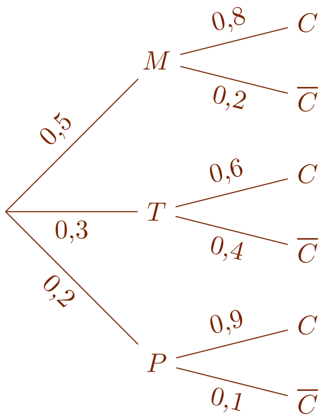
Nous remarquons que $h_9 \approx 0{,}214748$ et $h_{10} \approx 0{,}171798$.
Autrement dit

> il faut au minimum 10 rebonds pour que la hauteur lors d'un rebond soit inférieure à 20 cm.

III Exercice. 5 points

1. D'après l'énoncé :

$$\mathbb{P}(T) = \frac{30}{100} \text{ et } \mathbb{P}_T(C) = \frac{60}{100}.$$



2.

3. (a)

> $M \cap C$: « le client à choisi un assortiment de macarons puis à pris un café ».

Calculons $\mathbb{P}(M \cap C)$.

$\mathbb{P}(M) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M \cap C) &= \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(C)\\ &= 0{,}5 \times 0{,}8\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(M \cap C) = 0{,}4.}$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(C)$.

$\{M; T; P\}$ est un système complets d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(M \cap C) + \mathbb{P}(T \cap C) + \mathbb{P}(P \cap C)$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(C) + \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(C) + \mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}_P(C) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}9\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = 0{,}76.}$$

4. Calculons $\mathbb{P}_C(M)$.

Par définition

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_C(M) &= \frac{\mathbb{P}(C \cap M)}{\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{0{,}4}{0{,}76}\end{aligned}$$

En tronquant au millième :

$$\mathbb{P}_M(C) \approx 0{,}526$$

Donc, en arrondissant au centième :

$$\boxed{\mathbb{P}_C(M) \approx 0{,}53.}$$

IV Exercice. 5 points

1. Calculons $N(1)$.

$$\begin{aligned} N(1) &= 100\mathrm{e}^{-2\times 1} \\ &= 100\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

En tronquant au cent-mmilième :

$$N(1) \approx 13{,}53352$$

Donc en arrondissant au millième :

$$N(1) = 13{,}534$$

L'entreprise, si le prix est fixé à 1000 €, vend, trimestriellement, 13,534 millions de téléphones.

2. Notons $B(x) = R(x) - C(x)$ le bénéfice.

Calculons $B(1)$.

$$\begin{aligned} B(1) &= R(1) - C(1) \\ &= 1 \times N(1) - 0{,}4 \times N(1) \\ &\approx 100\mathrm{e}^{-2} - 0{,}4 \times 100\mathrm{e}^{-2} \\ &= 60\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

En tronquant au dix-millième :

$$B(1) \approx 8{,}1201$$

En arrondissant au millième :

$$\boxed{B(1) \approx 8{,}120.}$$

3. Déterminons $B(x)$.

   Soit $x \in [0{,}4; 2]$.

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= x \times N(x) - 0{,}4 \times N(x) \\ &= x \times 100\mathrm{e}^{-2x} - 0{,}4 \times 100\mathrm{e}^{-2x} \\ &= (x \times 100 - 0{,}4 \times 100) \times \mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B(x) = (100x - 40)\mathrm{e}^{-2x}.$$

4. Étudions les variations de B.

   $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc B' est du même signe que $h : x \mapsto 180 - 200x$.

   h est une fonction affine avec $a = -200$ et $b = 180$. $a < 0$ donc h est strictement décroissante. h s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{180}{-200} = 0{,}9$. Nous en déduisons le signe de h :

x	$0{,}4$		$0{,}9$		2
$180 - 200x$		$+$	0	$-$	
B	0	$\nearrow$	$50\mathrm{e}^{-1{,}8}$	$\searrow$	$160\mathrm{e}^{-4}$

5. D'après le tableau de variation précédent

   pour que le bénéfice soit maximal les téléphones doivent être vendus 900 €.