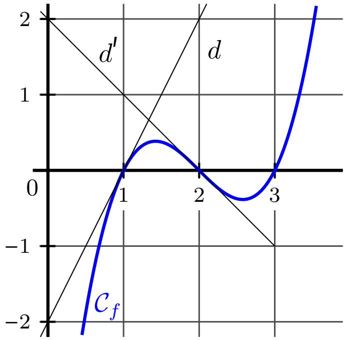
Bac 2021 mathématiques première spécialité sujet public 061.

I Exercice. 5 points

1. La courbe ci-dessous $\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f. Les droites d et d' sont respectivement les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 1 et 2.



Les équations réduites de d et d' sont respectivement :

$$d: \ y = 2x - 2 \quad \text{et} \quad d': \ y = -x + 2.$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est juste ?

Proposition A : $f'(1) = 0$.

Proposition B : $f'(2) = 2$.

Proposition C : $f'(2) = -1$.

Proposition D : $f'(1) = -2$.

Réponse C.

2. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x = \frac{1}{2}$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est juste ?

Proposition A : $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

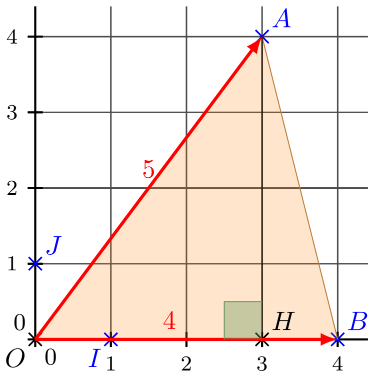
Proposition B : $x = \frac{\pi}{6}$.

Proposition C : $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition D : $x = -\dfrac{7\pi}{6}$.

Réponse A.

3. Soit (O,I,J) un repère orthonormé du plan.
Soit A et B deux points de coordonnées respectives $(3;4)$ et $(4;0)$.



Parmi les propositions suivantes, laquelle est juste ?

Proposition A : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = 20$.

Proposition B : $\sin\left(\widehat{AOB}\right) = \dfrac{\sqrt{17}}{5}$.

Proposition C : $\cos\left(\widehat{AOB}\right) = \dfrac{4}{5}$.

Proposition D : $\sin\left(\widehat{AOB}\right) = \dfrac{4}{5}$.

Réponse C.

4. Soit (O,I,J) un repère orthonormé du plan.
Soit d une droite dont une équation cartésienne est : $3x + 2y - 10 = 0$.
Une équation cartésienne de la droite d' perpendiculaire à la droite d et passant par le point A de coordonnées $(1;2)$ est :

Proposition A : $3x+2y-7=0$.
Proposition B : $2x+3y-8=0$.
Proposition C : $2x-3y+4=0$.
Proposition D : $3x-2y+1=0$.

Réponse C.

5. Soit (O,I,J) un repère orthonormé du plan.
Soit A et B deux points de coordonnées respectives $(1;2)$ et $(5;-2)$.
Une équation cartésienne du cercle C de diamètre $[AB]$ est :

Proposition A : $x^2+y^2-8x-2y+7=0$.
Proposition B : $(x-1)^2+(y-2)^2=32$.
Proposition C : $x^2+y^2-4x+2y-5=0$.
Proposition D : $x^2+y^2-6x+1=0$.

Réponse D.

II Exercice. 5 points

Une balle en caoutchouc est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur de 2 mètres au-dessus du sol.

Le choix n'étant pas parfaitement élastique, la balle rebondit jusqu'à une hauteur de 1,60 mètre et continue de rebondir, en atteignant après chaque rebond une hauteur égale au $\dfrac{4}{5}$ de la hauteur du rebond précédent.

On modélise les hauteurs atteintes par la balle par une suite $h_n)$ où pour tout entier naturel n, h_n est la hauteur , exprimée en mètres, atteinte par la balle au n-ième rebond. On a alors $h_0=2$.

1. (a) Donner h_1 et h_2.

Calculons h_1.

La balle rebondi à $\frac{4}{5}$ de la hauteur précédente donc :

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{4}{5} \times h_0 \\ &= \frac{4}{5} \times 2 \\ &= 1{,}6 \end{aligned}$$

$$\boxed{h_1 = 1{,}6 \text{ m.}}$$

De même : $h_2 = \frac{4}{5} \times h_1$, et donc

$$\boxed{h_2 = 1{,}28 \text{ m.}}$$

(b) Pour tout entier naturel n, exprimer h_{n+1} en fonction de h_n.

En raisonnant comme à la question précédente :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ h_{n+1} = \tfrac{4}{5} h_n.}$$

(c) En déduire la nature de la suite (h_n). On précisera sa raison et son premier terme.

D'après la formule de récurrence obtenue à la question précédente :

$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de terme initial $h_0 = 1{,}6$ et de raison $q = \frac{4}{5}$.

(d) Déterminer le sens de variation de la suite (h_n).

Déterminons le sens de variation de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous pourrions arguer de ce que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique positive et de raison $q \in]0;1[$ donc strictement décroissante mais nous allons le démontrer.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} h_{n+1} - h_n &= qh_n - h_n \\ &= \frac{4}{5} \times h_n - 1 \times h_n \\ &= (\frac{4}{5} - 1) \times h_n \end{aligned}$$

h_n désignant une hauteur c'est un nombre positif par contre $\frac{4}{5} - 1 < 0$ donc $h_{n+1} - h_n < 0$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_{n+1} < h_n$. Autrement dit

$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

2. Déterminer le nombre minimal N de rebonds à partir duquel la hauteur atteinte par la balle est inférieure à 20 cm. Expliquer la démarche employée.

   Déterminons N.

   La méthode la plus élémentaire consiste à calculer les premiers termes de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de proche en proche grâce à la formule de récurrence jusqu'à obtenir moins que 0,2.

   Puisque $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de terme initial $h_0 = 1{,}6$ et de raison $\frac{4}{5}$, son terme général est $h_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \times 1{,}6$. Nous entrons cette formule (en remplaçant n par X) dans la calculatrice et nous consultons le tableau de valeur.

   Nous remarquons que $h_9 \approx 0{,}214748$ et $h_{10} \approx 0{,}171798$.
   Autrement dit

   il faut au minimum 10 rebonds pour que la hauteur lors d'un rebond soit inférieure à 20 cm.

III Exercice. 5 points

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert : un assortiment de macarons et une part de tarte tatin. Des études statistiques montrent que :

- l'assortiment de macarons est choisi par 50 % des clients ;
- la part de tarte tatin, est choisie par 30 % des clients ;
- 20 % des clients ne prennent pas de dessert ;
- aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que :

- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant.
On note les événements suivants :

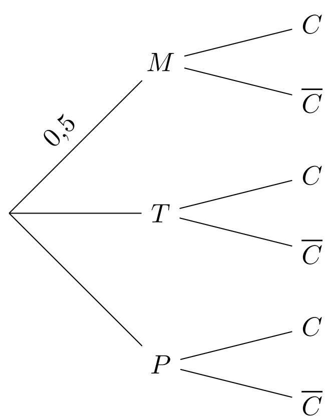
- M : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C : « Le client prend un café » et $\overline{C}$ l'événement contraire de C.

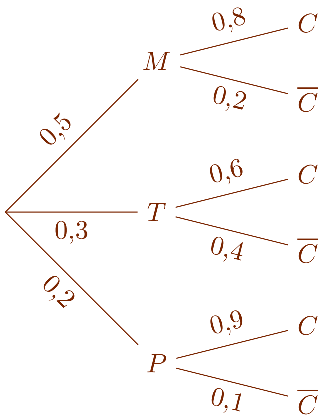
1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $P(T)$ probabilité de T et celle de $P_T(C)$ probabilité de l'évènement C sachant que T est réalisé.

   D'après l'énoncé :

   $$\boxed{\mathbb{P}(T) = \frac{30}{100} \text{ et } \mathbb{P}_T(C) = \frac{60}{100}.}$$

2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :





3. (a) Exprimer par une phrase ce que représente l'événement $M \cap C$ puis calculer $P(M \cap C)$.

$M \cap C$: « le client à choisi un assortiment de macarons puis à pris un café ».

Calculons $\mathbb{P}(M \cap C)$.

$\mathbb{P}(M) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M \cap C) &= \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(C) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}8\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(M \cap C) = 0{,}4.$

(b) Montrer que $P(C) = 0{,}76$.

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

$\{M; T; P\}$ est un système complets d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(M \cap C) + \mathbb{P}(T \cap C) + \mathbb{P}(P \cap C)$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(M)\times\mathbb{P}_M(C)+\mathbb{P}(T)\times\mathbb{P}_T(C)+\mathbb{P}(P)\times\mathbb{P}_P(C)\\ &= 0{,}5\times0{,}8+0{,}3\times0{,}6+0{,}2\times0{,}9\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C)=0{,}76.}$$

4. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ? (*On donnera le résultat arrondi au centième*).

   Calculons $\mathbb{P}_C(M)$.

   Par définition

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_C(M) &= \frac{\mathbb{P}(C\cap M)}{\mathbb{P}(C)}\\ &= \frac{0{,}4}{0{,}76}\end{aligned}$$

   En tronquant au millième :

$$\mathbb{P}_M(C)\approx 0{,}526$$

   Donc, en arrondissant au centième :

$$\boxed{\mathbb{P}_C(M)\approx 0{,}53.}$$

IV Exercice. 5 points

Une entreprise vend des smartphones d'un seul modèle « haut de gamme ».

Le service marketing modélise le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus par trimestre en fonction du prix de vente x par la fonction N définie par $N(x)=100\mathrm{e}^{-2x}$ où :

- x est le prix de vente **en milliers d'euros** d'un smartphone modèle « haut de gamme ». Le prix du smartphone modèle « haut de gamme » est compris entre 400 € et 2 000 € ; on a donc $x\in[0{,}4;2]$.
- $N(x)$ est le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus trimestriellement en **millions d'unités**.

1. Si le service commercial fixe le prix de vente de ce smartphone modèle « haut de gamme » à 1 000 €, quel sera le nombre de smartphones vendus trimestriellement ?
   On arrondira le résultat à mille unités.

   Calculons $N(1)$.

$$\begin{aligned} N(1) &= 100\mathrm{e}^{-2\times 1} \\ &= 100\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

   En tronquant au cent-mmilième :

$$N(1) \approx 13{,}53352$$

   Donc en arrondissant au millième :

$$N(1) = 13{,}534$$

   L'entreprise, si le prix est fixé à 1000 €, vend, trimestriellement, 13,534 millions de téléphones.

La recette trimestrielle $R(x)$ est obtenue en multipliant le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus par le prix de vente. On obtient $R(x) = x \times N(x)$ en **milliards d'euros**.

Le coût de production en milliards d'euros en fonction du nombre de smartphones modèle « haut de gamme » fabriqués est modélisé par la fonction C définie par $C(x) = 0{,}4 \times N(x)$ où x est le prix de vente **en milliers d'euros**.

Le bénéfice est obtenu en calculant la différence entre la recette et le coût de production.

2. Vérifier que le bénéfice trimestriel peut être estimé à 8,120 milliards d'euros pour un prix de vente 1 000 €.

   Notons $B(x) = R(x) - C(x)$ le bénéfice.

   Calculons $B(1)$.

$$\begin{aligned} B(1) &= R(1) - C(1) \\ &= 1 \times N(1) - 0{,}4 \times N(1) \\ &\approx 100\mathrm{e}^{-2} - 0{,}4 \times 100\mathrm{e}^{-2} \\ &= 60\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

En tronquant au dix-millième :

$$B(1) \approx 8{,}1201$$

En arrondissant au millième :

$$\boxed{B(1) \approx 8{,}120.}$$

3. Montrer que le bénéfice trimestriel s'exprime en milliards d'euros en fonction du prix de vente x en milliers d'euros par : $B(x) = (100x - 40)\mathrm{e}^{-2x}$.

Déterminons $B(x)$.

Soit $x \in [0{,}4; 2]$.

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= x \times N(x) - 0{,}4 \times N(x) \\ &= x \times 100\mathrm{e}^{-2x} - 0{,}4 \times 100\mathrm{e}^{-2x} \\ &= (x \times 100 - 0{,}4 \times 100) \times \mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ B(x) = (100x - 40)\mathrm{e}^{-2x}.}$$

4. On admet que pour tout réel $x \in [0{,}4; 2]$, $B'(x) = (180 - 200x)\mathrm{e}^{-2x}$.
Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0{,}4; 2]$.

Étudions les variations de B.

$\mathrm{e}^{-2x} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc B' est du même signe que $h : x \mapsto 180 - 200x$.

h est une fonction affine avec $a = -200$ et $b = 180$. $a < 0$ donc h est strictement décroissante. h s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{180}{-200} = 0{,}9$. Nous en déduisons le signe de h :

x	$0{,}4$		$0{,}9$		2
$180 - 200x$		$+$	0	$-$	
B	0	$\nearrow$	$50\mathrm{e}^{-1{,}8}$	$\searrow$	$160\mathrm{e}^{-4}$

5. À quel prix faut-il vendre ces smartphones pour assurer un bénéfice maximal ?

   D'après le tableau de variation précédent

   pour que le bénéfice soit maximal les téléphones doivent être vendus 900 €.