Bac 2021 mathématiques première spécialité sujet public 037.

I Exercice. 5 points

1. Soit x un nombre réel. On peut affirmer que :

   a) $\cos(x) = \sin(x)$.

   b) $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$.

   c) $\sin(\pi + x) = \sin(\pi - x)$.

   d) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

   Réponse b).

2. Les solutions dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ de l'équation $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont :

   a) $\dfrac{4\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$.

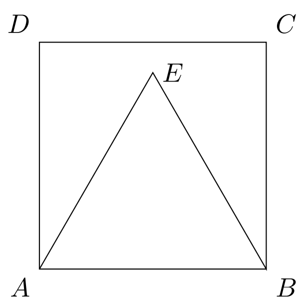
   b) $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$.

   c) $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

   d) $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$.

   Réponse a).

3. On considère $ABCD$ un carré direct dans lequel on construit un triangle ABE équilatéral direct.



On note $AB = a$.
On peut alors affirmer que :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}a^2$.

d) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = -a^2$.

Réponse c).

4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On peut affirmer que :

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{v} \cdot \vec{u}$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2}||\vec{u}||^2$.

d) $||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Réponse d).

5. Soit n un entier naturel.
On cherche à exprimer en fonction de n la somme suivante :

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots + (-2)^n.$$

On peut affirmer que :

a) $S = \dfrac{1 + (-2)^n}{2} \times (n+1)$.

b) S est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison (-2).

c) $S = \dfrac{1 - (-2)^n}{1 - 2}$.

d) $S = \dfrac{1}{3}\left(1 - (-2)^{n+1}\right)$.

Réponse d).

II Exercice. 5 points

Un magasin effectue des promotions avant sa liquidation définitive, chaque semaine les prix des articles sont diminués de 10 % par rapport à la semaine précédente.

Un manteau coûte 200 € avant le début de la liquidation, on pose $u_0 = 200$ et on note u_n son prix lors de la n-ième semaine de liquidation.

1. Calculer les termes u_1 et u_2 de la suite (u_n).

Calculons u_1.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 10 % est

$$\begin{aligned} q &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-10}{100} \\ &= 0{,}9 \end{aligned}$$

Donc après la première semaine le prix de l'article devient

$$\begin{aligned} u_1 &= q \times u_0 \\ &= 0{,}9 \times 200 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 180.}$$

Calculons u_2.

Comme précédemment :

$$\begin{aligned} u_2 &= q \times u_1 \\ &= 0{,}9 \times 180 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 162.}$$

2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 200$ dont on précisera la raison et exprimer le terme général de la suite (u_n) en fonction de n.

   Déterminons la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   En raisonnant comme à la question précédente nous remarquons que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = qu_n.$$
   Autrement dit

   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de terme initial $u_0 = 200$ et de raison $q = 0{,}9$.

   Déterminons le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de rang initial 0 et de raison q, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = u_0 \times q^n.$$

$$\forall x \in \mathbb{N},\ u_n = 200 \times 0{,}9^n.$$

3. La liquidation dure 12 semaines, déterminer le prix du manteau à la fin de la liquidation s'il est toujours en vente. On donnera le résultat arrondi au centime.

   Calculons u_{12}.

$$\begin{aligned} u_{12} &= 200 \times q^{12} \\ &\approx 56{,}485907 \end{aligned}$$

$$u_{12} \approx 56{,}49.$$

4. On considère la fonction suivante, écrite en langage Python :

```python
def seuil(x):
    u=200
    n=0
    while ..........:
        u=..........
        n=..........
    return n
```

Recopier et compléter sur la copie la fonction afin qu'elle renvoie le nombre de semaines nécessaires pour que le terme général de la suite (u_n) soit inférieur au nombre réel x.

```python
def seuil(x):
    u=200
    n=0
    while u>x:
        u=0.9*u
        n=n+1
    return n
```

5. Une personne décide d'acheter le manteau dès que son prix sera inférieur à 100 €. Combien de semaines devra-t-elle attendre ?

   Déterminons le temps d'attente nécessaire.

   $u_6 \approx 106{,}29$ et $u_7 \approx 95{,}66$.

   $\boxed{\text{Elle devra attendre 7 semaines.}}$

III Exercice. 5 points

Afin d'établir les liens entre le surpoids et l'alimentation, on interroge les enfants des écoles primaires d'une ville.

L'enquête révèle que 60 % des enfants boivent 1 boisson sucrée ou plus par jour.
Parmi les enfants buvant 1 boisson sucrée ou plus par jour, un enfant sur 8 est en surpoids, contre seulement 8 % pour les enfants buvant moins d'une boisson sucrée par jour.

On choisit un enfant au hasard parmi les enfants des écoles primaires de la ville et on considère les événements suivants :

B : « l'enfant boit 1 boisson sucrée ou plus par jour »,
S : « l'enfant est en surpoids ».

Les événements contraires de B et de S sont notés respectivement $\overline{B}$ et $\overline{S}$.

Pour tous événements A et B, avec B un événement de probabilité non nulle, la probabilité de A sachant B est notée $P_B(A)$.

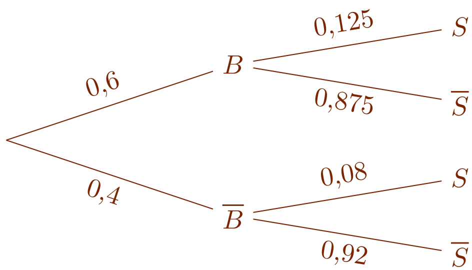
1. Justifier que $P_B(S) = 0{,}125$.

   $\mathbb{P}_B(S)$ désigne la probabilité qu'un enfant soit en surpoids sachant qu'il boit une boisson sucrée ou plus par jour.

   Or d'après l'énoncé parmi les enfants buvant une boisson sucrée ou plus par jour, un enfant sur 8 est en situation de surpoids donc

   $$\boxed{\mathbb{P}_B(S) = \frac{1}{8}.}$$

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.



3. Calculer $P(B \cap S)$.

   Calculons $\mathbb{P}(B \cap S)$.

   $\mathbb{P}(B) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées :

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cap S) &= \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}_B(S) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}125\end{aligned}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(B \cap S) = 0{,}075.}$$

4. Déterminer la probabilité que l'enfant soit en surpoids.

   Calculons $\mathbb{P}(S)$.

   $\{B, \overline{B}\}$ est un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S \cap B) + \mathbb{P}(S \cap \overline{B})$$

   D'après la formule des probabilités composées (car $\mathbb{P}(\overline{B}) > 0$)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}_B(S) + \mathbb{P}(\overline{B}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{B}}(S) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}125 + 0{,}4 \times 0{,}08\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(S) = 0{,}107.}$$

5. On a choisi un enfant en surpoids. Quelle est la probabilité qu'il boive 1 boisson sucrée ou plus par jour ? On arrondira le résultat au millième.

   Calculons $\mathbb{P}_S(B)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_S(B) &= \frac{\mathbb{P}(S \cap B)}{\mathbb{P}(S)} \\ &= \frac{0{,}075}{0{,}107} \\ &= \frac{75}{107} \\ &\approx 0{,}7009345\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_S(B) \approx 0{,}7001.}$$

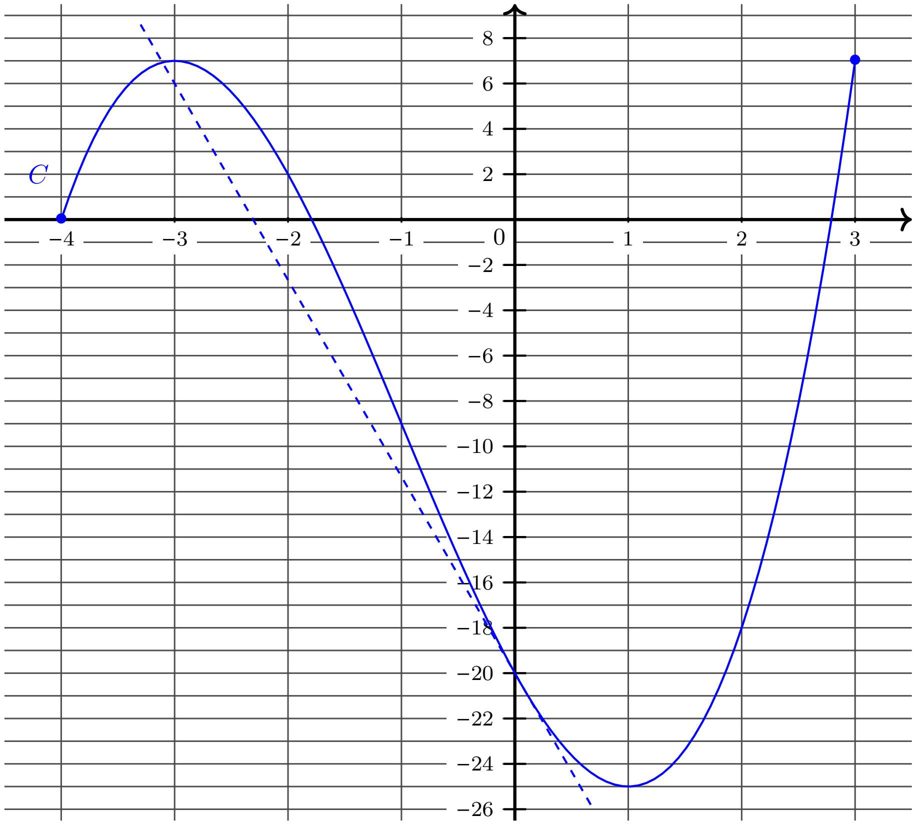
IV Exercice. 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 3]$ par

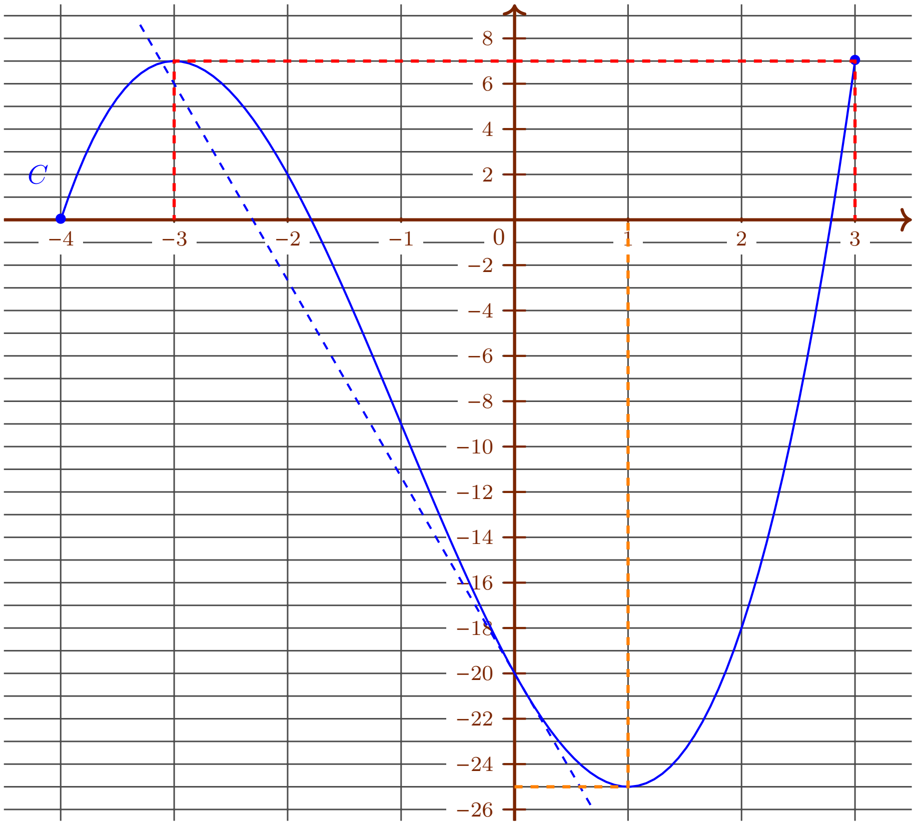
$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 20.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$ et on note f' sa fonction dérivée.

La courbe représentative de la fonction f, notée C, est tracée dans le repère ci-dessous. La droite T tracée dans le repère est la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.



1. Déterminer graphiquement les extrema de la fonction f.



f admet un maximum égale à 7 qui est atteint en -3 et en 3.
f admet un minimum égale à -25 qui est atteint en 1.

2. Déterminer l'expression de $f'(x)$ sur $[-4;4]$.

   Déterminons f'.

   f est une fonction polynomiale donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   pour tout x réel : $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

3. Étudier le signe de $3x^2 + 6x - 9$ en fonction de x sur $[-4;4]$.

   Étudions le signe de f'.

* f' est un trinôme avec $a = 3$, $b = 6$ et $c = -9$.
* On vérifie aisément que les valeurs graphiquement correspondent effectivement à de racines de f' (théorème de Fermat) : $f'(-3) = 0$ et $f'(1) = 0$.
* Comme un trinôme est du signe de son coefficient dominant (ici $a > 0$) sauf entre les racines :

x	-4		-3		1		3
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. En déduire le tableau de variations de f sur $[-4; 4]$ et retrouver les résultats de la question 1.

x	-4		-3		1		3
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	7	$\searrow$	-25	$\nearrow$	7

5. Déterminer l'équation réduite de la droite T, tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

Déterminons l'équation réduite de T.

L'équation de la tangente est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\boxed{T : \; y = -9x - 20.}$$