Bac 2021 mathématiques première spécialité sujet public 012.

I Exercice. 5 points

1. Réponse b).
2. Réponse d).
3. Réponse b).
4. Réponse d).
5. Réponse b).

II Exercice. 5 points

1. (a) Calculons u_1.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 5 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{5}{100} \\ &= 1{,}05 \end{aligned}$$

Donc la surface envahie par le développement des racines après une semaine est $u_0 \times 1{,}05$. En tenant compte de la dissémination des graines la surface envahie est

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times 1{,}05 + 15 \\ &= 300 \times 1{,}05 + 15 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 330 \text{ m}^2.}$$

De même

$$\begin{aligned} u_2 &= 1{,}05 \times u_1 + 15 \\ &= 1{,}05 \times 330 + 15 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 361{,}5 \text{ m}^2.}$$

(b) Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique.

$$\begin{aligned} u_1 - u0 &= 330 - 300 \\ &= 30 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 361{,}5 - 330 \\ &= 31{,}5 \end{aligned}$$

donc : $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$. Par conséquent

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas arithmétique.}}$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique.

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} &= \frac{330}{300} \\ &= 1{,}1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{u_2}{u_1} &= \frac{361{,}5}{330}\\ &= \frac{241}{220}\end{aligned}$$

donc : $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. Par conséquent :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas géométrique.}}$$

2. (a) Calculons v_0.

$v_0 = u_0 + 300 = 300 + 300$

$$\boxed{v_0 = 600.}$$

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} + 300\\ &= 1{,}05u_n + 15 + 300\\ &= 1{,}05(u_n + 300)\\ &= 1{,}05v_n\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 1{,}05u_n$. Autrement dit

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une géométrique de raison } q = 1{,}05.}$$

(b) Déterminons le terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de terme initial $v_0 = 600$ et de raison $a1{,}05$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = q^n \times v_0$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = 1{,}05^n \times 600.}$$

Déterminons le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par construction $v_n = u_n + 300$. Donc

$$u_n = v_n - 300$$

Ainsi

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 1{,}05^n \times 600 - 300.}$$

3. Calculons u_8.

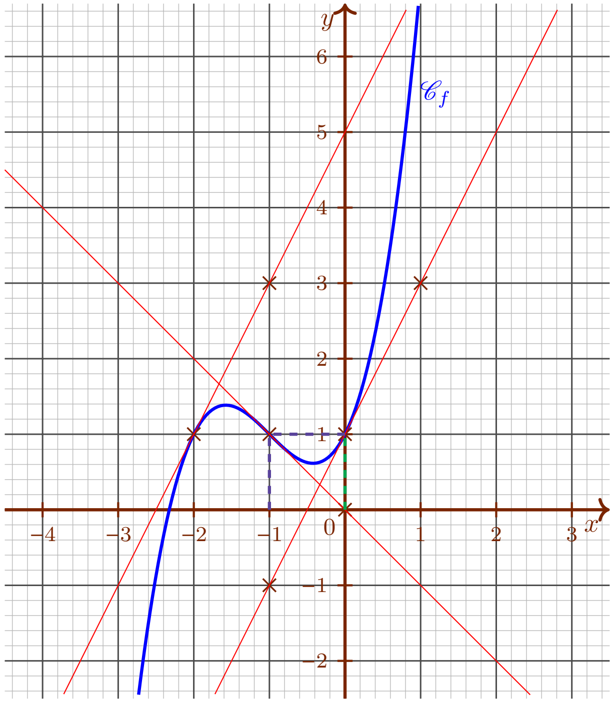
$$\begin{aligned} u_8 &= 1{,}05^8 \times 600 - 300 \\ &\approx 586{,}4732 \end{aligned}$$

$2 \times 300 > u_8$ donc

$$\boxed{\text{la surface envahie par les chardons n'aura pas doublé au bout de 8 semaines.}}$$

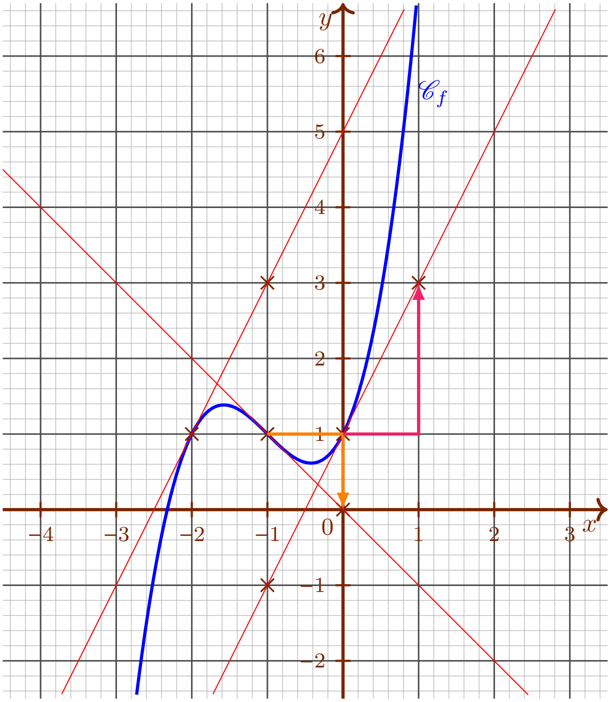
III Exercice. 5 points

1. Par lecture graphique :



donc pour les images

x	-1	0
$f(x)$	1	1
$f'(x)$		



et pour les antécédents

x	-1	0
$f(x)$	1	1
$f'(x)$	-1	2

2. (a) Déterminons f'.

   f est une fonction polynomiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   $$\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel } f'(x) = 3x^2 + 6x + 2.}$$

   (b) Résolvons $f'(x) = 0$.

   f' est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 3$, $b = 6$ et $c = 2$.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 6^2 - 4 \times 3 \times 2 \\ &= 12\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc f' admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a} \\ &= \frac{-6 - \sqrt{12}}{2 \times 3} \\ &= -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} \\ &= \frac{-6 + \sqrt{28}}{2 \times 1} \\ &= -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ est $\left\{-3 - \frac{\sqrt{3}}{3} ; -3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

3. Comme la fonction trinôme f' est du signe de son coefficient dominant, $a = 1 > 0$, sauf entre ses éventuelles racines :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	

avec $f(x_1) = 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}$ et $f(x_2) = 1 - \frac{2}{9}\sqrt{3}$.

4. Déterminons une équation réduite de la $\mathscr{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = -2$.

   Nous savons qu'une équation de $\mathscr{T}$ est $y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$. Or $f'(-2) = 2$ et $f(-2) = 1$ donc

   $$\mathscr{T} : \; y = 2(x + 2) + 1.$$

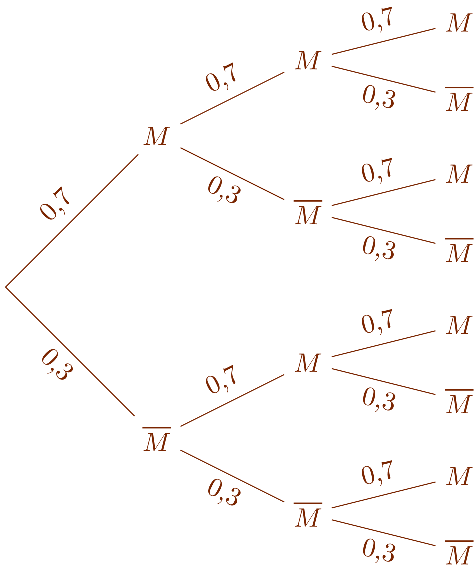
   Autrement dit l'équation réduite de $\mathscr{T}$ est

   $$y = 2x + 5.$$

   Comme $2 \times (-4) + 5 = -3$ nous pouvons affirmer que

   $$\boxed{S \in \mathscr{T}.}$$

IV Exercice. 5 points



1. (a)

(b) Déterminons la loi de X.

D'après l'arbre : $X \in \{0;1;2;3\}$.
Calculons, par exemple, $\mathbb{P}(X=2)$.
$\{X=2\} = \{MM\overline{M}, M\overline{M}M, \overline{M}MM\}$.
Donc

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(MM\overline{M}) + \mathbb{P}(M\overline{M}M) + \mathbb{P}(\overline{M}MM)$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2) &= 0{,}7\times 0{,}7\times 0{,}3 + 0{,}7\times 0{,}3\times 0{,}7 + 0{,}3\times 0{,}7\times 0{,}7\\ &= 0{,}441\end{aligned}$$

En procédant de même pour les autres valeurs prises par X :

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	0,027	0,189	0,441	0,343

(c) Calculons $\mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathbb{P}(X = x_i)\\ &= 0 \times 0{,}027 + 1 \times 0{,}189 + \cdots + 3 \times 0{,}343\end{aligned}$$

$\mathbb{E}(X) = 2{,}1.$

2. (a) $Y = 6X - 15.$

(b) Déterminons la loi de probabilité de Y.

y	-15	-9	-3	3
$\mathbb{P}(Y = y)$	0,027	0,189	0,441	0,343

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \mathbb{P}(Y = y_i)\\ &= -15 \times 0{,}027 + (-9) \times 0{,}189 + \cdots + 3 \times 0{,}343\end{aligned}$$

$\mathbb{E}(Y) = -2{,}4.$

Si l'on recommençait un grand nombre de fois ce jeu, en moyenne, à chaque partie, on perdrait 2,4 €.